

Un ejercicio académico sobre optimización de celosías

Fernandez Cabo, Jose L.

jose.fcabo@upm.es

Antuña Bernardo, Joaquín

joaquinfrancisco.antuna@upm.es

Palabra clave: Material docente, optimización, peso mínimo, celosías, articuladas, diseño, estructuras.

Resumen

En este artículo se presenta un trabajo propuesto en la asignatura *La Estructura en el Proyecto Arquitectónico* realizado en la *Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid*.

El objetivo del ejercicio es trabajar sobre la optimización de estructuras articuladas. El estudiante debe diseñar una celosía con la que equilibrar una serie de cargas determinadas en magnitud y posición que, además, esté comprendida en un contorno determinado. Los estudiantes cuentan con un guión escrito en MATLAB® con el que pueden calcular el volumen de material que precisa la solución que proponen, así como otros parámetros. De este modo, la atención de los alumnos se centra en el diseño, que es el objetivo de la asignatura.

Se analizan varias soluciones con el fin de presentarlas en clases. Esa presentación permite la exposición de los contenidos teóricos que explican y soportan el trabajo previo. De este modo se pretende hacer más asimilables los conceptos más abstractos facilitando el proceso de aprendizaje.

El ejercicio pone de manifiesto que el parámetro fundamental del diseño es la esbeltez (definida como la relación entre la máxima luz y el canto mayor de la celosía). Mientras que el esquema tiene menos relevancia. Si se elige la disposición de los cordones con una determinada esbeltez, el alma de la celosía se puede completar con barras dispuestas con una inclinación próxima a los 45°. El caso de una esbeltez entre 8 y 10, el mejor diseño es una celosía de cordones paralelos con las diagonales inclinadas entre 30° y 60° (más eficaz si la inclinación se mueve entre los 45° y los 60°). Para esbelteces menores que 8, el arco es una solución más eficaz que la celosía. De modo que en los casos habituales, la elección del canto es la decisión principal del proyectista.

Por último, se estudian ejemplos de estructuras construidas con el fin de observar como se resuelven las diferentes variables en casos concretos. En muchos casos se ve que las decisiones no se pueden deducir de las conclusiones de los ejercicios teóricos estudiados previamente. La sencillez de la solución pasa a ser un parámetro relevante. Asimismo, técnicas como el pretensado permiten un aumento notable de la eficacia.

También se muestran algunas obras maestras construidas, con luces habituales en edificación y con esquemas poco eficaces. Los casos reales son, en general, complejos y se manejan gran cantidad de variables, y aunque la eficacia estructural no garantiza una buena solución arquitectónica, también es posible alcanzar ambos objetivos.

1 Introducción

La educación es un proceso complejo que admite diversas estrategias, sin embargo, el aprendizaje se facilita cuando los alumnos se implican en el proceso y, para ello, la realización de ejercicios es una herramienta fundamental para conseguirlo.

En este artículo se describe un ejercicio preparado para trabajar sobre la optimización de celosías de barras articuladas. Se realizó en la *Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid* (ETSAM) en la asignatura *La Estructura en el Proyecto Arquitectónico*.

El objetivo de la asignatura es el diseño y en su organización se combina el estudio teórico con el análisis de estructuras construidas. La experiencia ha mostrado que el primero supone mayores dificultades para los estudiantes. De modo que el ejercicio pretende facilitar la comprensión del problema de la optimización de celosías. Gracias al empleo del guión realizado con MATLAB® se puede realizar el ejercicio propuesto con un esfuerzo razonable.

El desarrollo del ejercicio en el aula permite tratar y profundizar en conceptos teóricos básicos facilitando su comprensión. Y aunque únicamente se tratan cuestiones elementales, formarán parte del bagaje teórico estructural del estudiante.

El ejercicio se describe en la sección segunda; en la tercera se resumen los fundamentos teóricos que se utilizan en el ejercicio; en la sección 4 se presentan los resultados; en la sección 5 se comentan; en la 6 se repasan varias estructuras construidas (lo que supone un contrapunto importante frente a las simplificaciones realizadas en las secciones anteriores) y en la sección 7 se resumen las conclusiones. El anejo A incluye el guión realizado para MATLAB® comentado.

2 El ejercicio

El ejercicio se resume en la figura 1. Los datos son: una serie de fuerzas en equilibrio situadas a lo largo de una línea **ab** (de forma que las coacciones están implícitas) y un contorno definido por el rectángulo **abcd**.

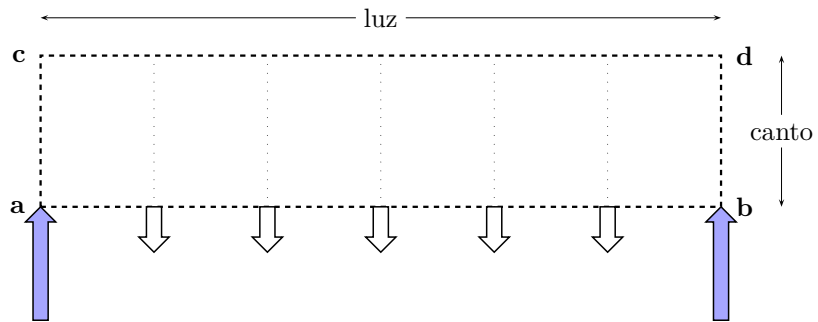


Figura 1: Descripción del ejercicio: definir una celosía en equilibrio con las fuerzas cuyo punto de aplicación se sitúa en la línea **ab** y que están en equilibrio, contenida en el rectángulo **abcd**

El estudiante puede proponer una celosía o un antifunicular que cumpla las condiciones indicadas.

La distribución de fuerzas corresponde a una situación habitual en edificación: el caso de una estructura isostática sometida a una carga uniforme. Suponer la concentración de una carga uniformemente distribuida en cinco cargas puntuales será una de las cuestiones que se traten en la clase.

El ejercicio se limita a celosías estáticamente determinadas y estructuras funiculares por dos razones. En primer lugar porque la gran mayoría de las estructuras con luces importantes se resuelven con celosías; son fáciles de fabricar y construir, siendo más eficaces que las estructuras continuas (en las que es más frecuente el sobredimensionado). En segundo lugar, se trata de estructuras estáticamente determinadas en el caso de las celosías, y de estructuras hipoestáticas en el caso de las soluciones

funiculares, con lo que únicamente utilizando consideraciones de equilibrio se pueden obtener las fuerzas internas. No es necesario plantear condiciones de compatibilidad ni plantear las ecuaciones del material. Con ello se simplifica el ejercicio ahorrando tiempo y centrando la atención de los estudiantes en el esquema, en lugar de su dimensionado. Se trata de una asignatura de diseño.

Las fuerzas internas se obtiene utilizando el guión de MATLAB® incluido en el anejo A, válido para soluciones en 2D y 3D. El fundamento teórico se puede consultar en un guión similar descrito por Fernandez Cabo (2012) y realizado en MAPLE®.

3 Fundamento teórico: estado del arte

La optimización es una disciplina amplia. En la asignatura se sigue la línea de trabajo iniciada por Maxwell (1890) y Michell (1904), concretada y ampliada por el profesor Ricardo Aroca en el campo de las celosías (Aroca, 1989/1990, 1992/1993, 2002/2011) En esta sección se resumen las ideas del trabajo de Aroca utilizadas en este ejercicio.

El volumen V de una celosía articulada sometida a la acción de cargas puntuales en los nudos, se puede obtener sumando el volumen de cada uno de sus elementos m :

$$V = \sum_1^m A_j L_j = \frac{1}{\sigma} \underbrace{\sum_1^m |N_j| L_j}_W \quad (1)$$

En donde A es la sección transversal de cada barra, L es su longitud, σ es la tensión admisible del material empleado (suponiendo que, para un diseño óptimo es constante) y N es la fuerza interna.

La *cantidad de material* W se define como:

$$W = \sum_1^m |N_j| L_j \quad (2)$$

De modo que el volumen V de la estructura es proporcional a W . En los casos en que la estructura es estáticamente determinada, W se puede obtener sin necesidad de dimensionar, teniendo en cuenta únicamente el material. Con ello se puede centrar la atención en el esquema. En el caso de estructuras hiperestáticas se puede suponer una distribución de tensiones y de ese modo evitar tener que realizar el dimensionado.

W se puede calcular como la suma de la contribución de las barras traccionadas W^+ y las comprimidas W^- :

$$W^+ = \sum |N_j^+| L_j \quad (3)$$

$$W^- = \sum |N_j^-| L_j \quad (4)$$

De ese modo:

$$W = W^+ + W^- \quad (5)$$

Maxwell (1890) enunció un teorema importante: dado un conjunto de fuerzas en equilibrio, en todas las configuraciones de barras asociadas con ese conjunto, se cumple que la diferencia de cantidad de material en tracción y en compresión es un invariante. A ese valor se le denomina habitualmente constante de Maxwell k_M :

$$k_M = W^+ - W^- \quad (6)$$

Por otra parte, como w se puede considerar un *trabajo*, cada sumando se puede considerar como un producto escalar. Esto permite obtener W como la suma de las componentes vertical y horizontal, W_x and W_y :

$$\underbrace{\sum |N_j| L_j}_W = \underbrace{\sum |N_{jx}| L_{jx}}_{W_x} + \underbrace{\sum |N_{jy}| L_{jy}}_{W_y} \quad (7)$$

En donde los subíndices x e y indican los componentes horizontal y vertical respectivamente.

Como W es proporcional al volumen de la estructura, *su valor mide la eficacia de una determinada configuración*; con lo que se convierte en un parámetro relevante en la teoría de optimización de configuraciones de celosías. En términos generales, para una luz dada y una serie de fuerzas verticales (el caso estudiado) W es proporcional a la carga total y a la luz L

$$W = \mu PL \quad (8)$$

en donde μ es una constante, y su valor da idea de la eficiencia de cada configuración, cuanto menor es su valor, mayor es la eficacia. Esta ecuación es habitual en los escritos sobre optimización

Para un determinado material de peso específico ρ , el peso propio P_{DL} se puede obtener como:

$$P_{DL} = \rho V = \frac{\rho}{\sigma} W = \frac{1}{\sigma/\rho} \mu PL \quad (9)$$

En donde el parámetro σ/ρ tiene un significado físico preciso: representa la máxima altura que puede alcanzar un prisma, de sección constante, realizado con ese material y que puede soportar únicamente su peso propio. La expresión σ/ρ incluye únicamente términos referidos al material. En el cuadro 1 se muestran los valores de σ/ρ de varios materiales habitualmente utilizados en edificación.

Material	σ/ρ (m)
Fábrica	5000
Hormigón armado	300
Madera aserrada	1500
Acero usual en edificación	2100
Acero de pretensado	10000
Fibra de carbono	40000

Cuadro 1: Valores aproximados de (σ/ρ) en varios materiales.

Una de las aportaciones del profesor Ricardo Aroca ha sido la de precisar el valor del parámetro μ para el caso de fuerzas verticales y puntos de aplicación en la misma horizontal, y limitando los cambios geométricos al grupo de transformaciones afines que mantienen las abscisas de los nodos, con el fin de mantener constante la luz:

$$P_{DL} = \frac{1}{\sigma/\rho} \mu PL = \frac{1}{\sigma/\rho} PL k \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\lambda_o} + \frac{\lambda_o}{\lambda} \right)}_{\mu} \quad (10)$$

en donde λ es la esbeltez de la estructura, definida como la luz L dividida por el valor del mayor canto h , $\lambda = L/h$; λ_o es la esbeltez óptima, por ejemplo, la esbeltez correspondiente al peso mínimo (i.e. con el mínimo W); k es una constante dependiente del esquema o de la topología de la estructura

Por tanto, el peso propio de la estructura se puede expresar de manera que las variables que intervienen en el problema aparecen claramente separadas.

$$P_{DL} = \underbrace{\frac{1}{\sigma/\rho}}_{\text{MATERIAL}} \underbrace{P}_{\text{CARGA}} \underbrace{L}_{\text{LUZ}} \underbrace{k}_{\text{ESQUEMA}} \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\lambda_o} + \frac{\lambda_o}{\lambda} \right)}_{\text{ESBELTEZ}} \quad (11)$$

en donde

$$W = PLk \left(\frac{\lambda}{\lambda_o} + \frac{\lambda_o}{\lambda} \right) \quad (12)$$

Las dos variables geométricas, el esquema y la esbeltez aparecen separadas. La esbeltez hace referencia a una variable, la relación entre la luz y el canto total. Sin

embargo el esquema implica que las abscisas permanecen fijas, así como la proporción entre sus ordenadas. Los ejemplos de la sección 4 servirán para aclarar esta cuestión

El término $\frac{\lambda}{\lambda_o}$ está relacionado con W_x y el término $\frac{\lambda_o}{\lambda}$ con W_y ; esto es:

$$\begin{aligned} W_x &= PLk \left(\frac{\lambda}{\lambda_o} \right) \\ W_y &= PLk \left(\frac{\lambda_o}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

para la esbeltez óptima, $\lambda = \lambda_o$, sus valores son iguales:

$$W_{x,0} = W_{y,0} \quad (14)$$

Para un esquema dado, la mínima cantidad de estructura, W_0 , es:

$$W_0 = 2W_{x,0} = 2W_{y,0} = PL2k \quad (15)$$

para

$$\lambda = \lambda_o \rightarrow \mu_0 = 2k \quad (16)$$

El valor de la constante k y la esbeltez óptima λ_0 se pueden obtener operando la expresión Eq. 13:

$$W_x W_y = P^2 L^2 k^2 \rightarrow k = \frac{\sqrt{W_x W_y}}{PL} \quad (17)$$

$$\frac{W_y}{W_x} = \frac{\lambda_o^2}{\lambda^2} \rightarrow \lambda_0 = \lambda \sqrt{\frac{W_y}{W_x}} \quad (18)$$

Para terminar, veamos de nuevo la expresión 11. Una estructura con un tamaño igual a su máxima luz L_{max} , únicamente puede soportar su peso propio $P = P_{DL}$, por tanto:

$$P_{DL} = \frac{1}{\sigma/\rho} P_{DL} L_{max} k \left(\frac{\lambda}{\lambda_o} + \frac{\lambda_o}{\lambda} \right) \rightarrow L_{max} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{1}{k \left(\frac{\lambda}{\lambda_o} + \frac{\lambda_o}{\lambda} \right)} \quad (19)$$

Conviene destacar que $k(\lambda/\lambda_o + \lambda_o/\lambda) = \mu$ (ver Eq. 8) (que representa la cantidad de material por unidad de carga y distancia $\mu = W/(PL)$) de donde:

$$L_{max} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{1}{\mu} \quad (20)$$

La expresión anterior se puede obtener, en el límite para $L = L_{max}$, de la Eq. 8, como se ve en la Eq. 18.

Se puede utilizar en los casos en los que una transformación afín no permite obtener una estructura, con lo que la ecuación 10 deja de ser válida. Aunque se puede utilizar para cada valor de esbeltez.

El pandeo se puede tener en cuenta en el guión de MATLAB® suponiendo un valor constante (el término ω en el guión) para todos las barras comprimidas. En esos casos, la fuerza de compresión se multiplica por ese valor con el fin de valorar el incremento de material debido al pandeo local. En este ejercicio no se ha tenido en cuenta el pandeo global de la estructura, y tampoco se ha realizado un estudio paramétrico del término ω

4 Resultados

El guión de MATLAB® (ver Anejo-A) permite obtener los valores de: W (Eq. 2), W_x (Eq. 3), W_y (Eq. 4), (y W_z para estructuras en 3D), k (Eq. 17), λ_0 (Eq. 18), L_{max} (Eq. 19 y Eq. 20). Para cada tipo se han considerado cuatro valores de esbeltez:

$\lambda = \lambda_0$; $\lambda = 2\lambda_0$; $\lambda = 12$ and $\lambda = 24$. No se ha considerado el pandeo. En la siguiente sección se estudiará el contenido del guión.

En los cuadros 2 a 26 se resumen los resultados obtenidos. Los estudiantes únicamente trabajarán con soluciones habituales en edificación.

Los valores de esbeltez se han elegido de acuerdo con el siguiente criterio. La esbeltez óptima, $\lambda = \lambda_0$, sin tener en cuenta el efecto del pandeo ni la acción del viento o el coste del revestimiento, etc. . . Aumentando la esbeltez al doble, $\lambda = 2\lambda_0$, el peso únicamente aumenta en el 25 %:

$$\frac{\left(\frac{\lambda=2\lambda_0}{\lambda_0} + \frac{\lambda_0}{\lambda=2\lambda_0}\right)}{\left(\frac{\lambda=\lambda_0}{\lambda_0} + \frac{\lambda_0}{\lambda=\lambda_0}\right)} = \frac{2,5}{2} = 1,25 \quad (21)$$

Dado que no se ha considerado el efecto del pandeo, el valor de $\lambda = 2\lambda_0$ se aproxima a la esbeltez óptima. De hecho es el valor que se encuentra en las estructuras construidas de gran luz.

Los otros dos casos de esbeltez estudiados son $\lambda = 12$ y $\lambda = 24$.

En celosías de cordones paralelos con diagonales inclinadas en torno a 45° , realizadas con sección constante (por ejemplo dimensionadas para el máximo esfuerzo de cada tipo de elemento), y una tensión longitudinal admisible de $\epsilon = 0,8 \cdot 10^{-3}$; con una esbeltez de $\lambda = 12$ se alcanza un descenso máximo en torno a $L/300$; que supone un valor admisible para una cubierta habitual en edificación. Se puede decir que una celosía con una esbeltez de $\lambda = 12$ no presenta problemas de rigidez. Para casos de luces medias y largas, es una buena solución una esbeltez de $2\lambda_0 = \lambda = 12$. atendiendo a la resistencia la solución es todavía mejor

Valores de esbeltez próximos a $\lambda = 24$ conducen a soluciones que requieren sobredimensionado para limitar los desplazamientos a valores admisibles. Esta solución se admite habitualmente en elementos secundarios. Se puede considerar un límite superior para celosías simplemente apoyadas.

En los cuadros de resultados se indica el valor μ (ver Eq. 8 y Eq. 16), y los valores μ_x y μ_y , correspondientes a W_x y W_y . De esta manera se puede ver como para $\lambda > 12$, μ_y y por tanto W_y son despreciables. También se puede comprobar que verifica la expresión Eq. 14 para $\lambda = \lambda_0$; y que se verifica que $W_x = W_y$ para $\lambda = \lambda_0$ (ver Eq. 14). Por otra parte, se comprueba que el aumento de peso cuando se pasa de $\lambda = 12$ a $\lambda = 24$ es proporcional al aumento de esbeltez. Esto es debido a que aumenta la influencia del término λ/λ_0 , relacionado con W_x (el término λ_0/λ , relacionado con W_y prácticamente desaparece para valores de esbeltez $\lambda > 8$).

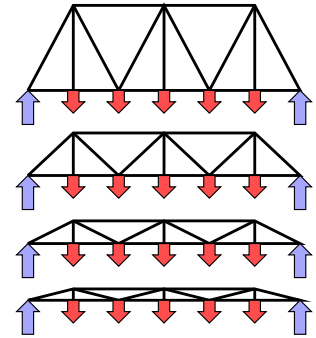
En los cuadros que se incluyen en las figuras siguientes se indica la cantidad de material para cada valor de esbeltez considerado.

El guión dibuja cada esquema a escala, ya que pensamos que es importante que el estudiante pueda ver la proporción exacta de cada caso, y poder recordar la eficacia de diferentes proporciones. Las figuras de esta sección están dibujadas a escala por la misma razón.

El valor de luz máxima L_{max} se ha obtenido a partir de la Eq. 19, y, en teoría, se trata de un límite superior. Para un caso real, en donde entran en juego otra serie de variables, la luz máxima de acuerdo con los datos existentes está en torno a un 20 % de ese valor. El valor indicado se refiere a un acero usual en edificación.

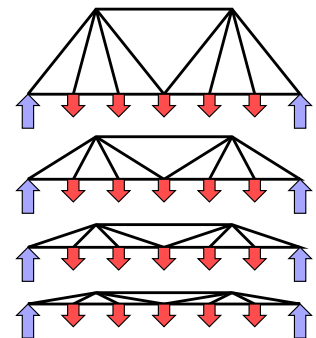
$\lambda_0 = 3,13 \quad k = 0,765$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
= λ_0	1.52(0.76/=)	(σ/ρ)/1.52	276
= $2\lambda_0$	1.91(1.53/0.38)	(σ/ρ)/1.91	219
12	3.13(2.93/0.20)	(σ/ρ)/3.13	134
24	5.97(5.87/0.10)	(σ/ρ)/5.97	70

Cuadro 2: Resultados del tipo #1.



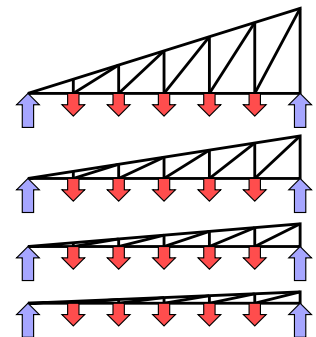
$\lambda_0 = 2,69 \quad k = 0,7416$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
= λ_0	1.48(0.74/=)	(σ/ρ)/1.48	283
= $2\lambda_0$	1.85(1.49/0.37)	(σ/ρ)/1.85	227
12	3.47(3.30/0.17)	(σ/ρ)/3.47	121
24	6.68(6.60/0.08)	(σ/ρ)/6.68	63

Cuadro 3: Resultados del tipo #2.



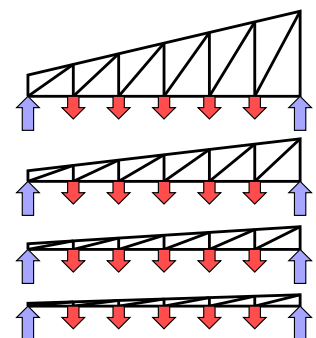
$\lambda_0 = 2,1214 \quad k = 1,4142$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
= λ_0	2.83(1.41/=)	(σ/ρ)/2.83	149
= $2\lambda_0$	3.54(2.83/0.71)	(σ/ρ)/3.54	119
12	8.25(8.0/0.25)	(σ/ρ)/8.25	51
24	16.12(16/0.12)	(σ/ρ)/16.1	26

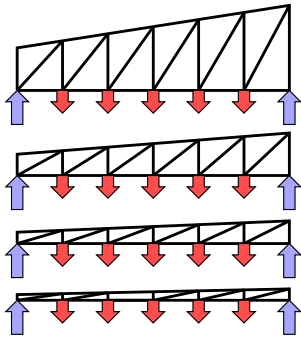
Cuadro 4: Resultados del tipo #3.



$\lambda_0 = 2,5715 \quad k = 1,0874$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
= λ_0	2.17(1.09/=)	(σ/ρ)/2.17	193
= $2\lambda_0$	2.72(2.17/0.54)	(σ/ρ)/2.72	155
12	5.32(5.07/0.23)	(σ/ρ)/5.32	79
24	10.3(10.2/0.12)	(σ/ρ)/10.3	41

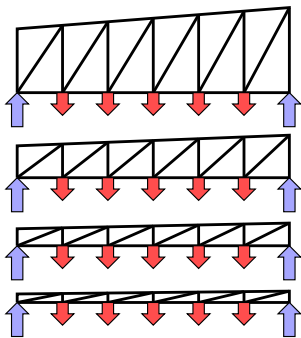
Cuadro 5: Resultados del tipo #4.





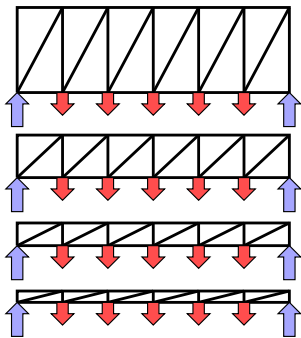
$\lambda_0 = 2,953 \quad k = 0,978$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
$= \lambda_0$	1.93(0.97/=)	(σ/ρ)/1.93	217
$= 2\lambda_0$	2.44(1.96/0.49)	(σ/ρ)/2.44	172
12	4.22(3.98/0.24)	(σ/ρ)/4.22	100
24	8.07(7.95/0.12)	(σ/ρ)/8.07	52

Cuadro 6: Resultados del tipo #5.



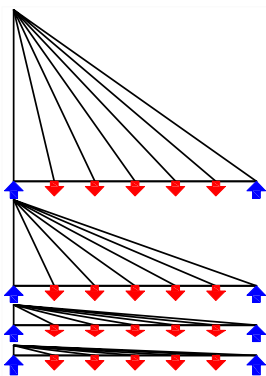
$\lambda_0 = 3,397 \quad k = 0,9518$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
$= \lambda_0$	1.90(0.95/=)	(σ/ρ)/1.90	221
$= 2\lambda_0$	2.38(1.90/0.48)	(σ/ρ)/2.38	177
12	3.63(3.36/0.27)	(σ/ρ)/3.63	116
24	6.86(6.72/0.13)	(σ/ρ)/6.86	61

Cuadro 7: Resultados del tipo #6.



$\lambda_0 = 3,8376 \quad k = 0,9381$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
$= \lambda_0$	1.88(0.94/=)	(σ/ρ)/1.88	224
$= 2\lambda_0$	2.34(1.88/0.47)	(σ/ρ)/2.34	197
12	3.23(2.93/0.30)	(σ/ρ)/3.23	130
24	6.02(5.87/0.15)	(σ/ρ)/6.02	70

Cuadro 8: Resultados del tipo #7.

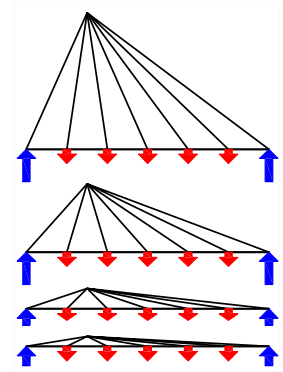


$\lambda_0 = 1,4142 \quad k = 1,4142$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
$= \lambda_0$	2.83(0.76/=)	(σ/ρ)/2.83	149
$= 2\lambda_0$	3.54(2.87/0.71)	(σ/ρ)/3.54	119
12	12.17(12/0.17)	(σ/ρ)/12.2	35
24	24.08(24/0.08)	(σ/ρ)/24.1	17

Cuadro 9: Resultados del tipo #8.

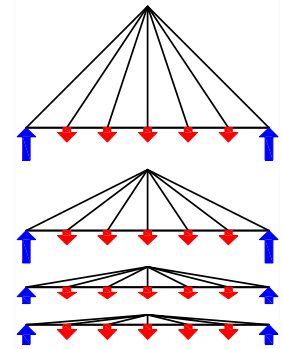
$\lambda_0 = 1,789 \quad k = 1,118$			acero con $(\sigma/\rho)=2100 \text{ m}$
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max} \text{ (m)}$
$= \lambda_0$	2.24(1.12/=)	$(\sigma/\rho)/2.24$	188
$= 2\lambda_0$	2.80(2.24/0.56)	$(\sigma/\rho)/2.80$	150
12	7.67(7.50/0.17)	$(\sigma/\rho)/7.67$	55
24	15.08(15/0.08)	$(\sigma/\rho)/15.08$	28

Cuadro 10: Resultados del tipo #9.



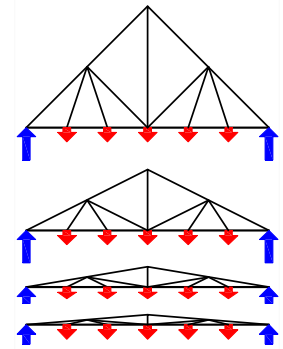
$\lambda_0 = 2 \quad k = 1$			acero con $(\sigma/\rho)=2100 \text{ m}$
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max} \text{ (m)}$
$= \lambda_0$	2(1/=)	$(\sigma/\rho)/2$	210
$= 2\lambda_0$	2.5(2/0.5)	$(\sigma/\rho)/2.5$	168
12	6.17(6.00/0.17)	$(\sigma/\rho)/6.17$	68
24	12.08(12/0.08)	$(\sigma/\rho)/12.08$	35

Cuadro 11: Resultados del tipo #10.



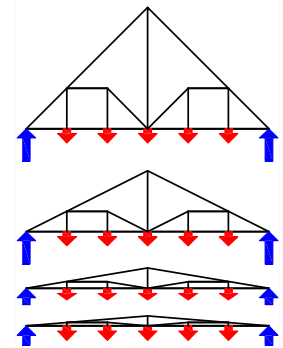
$\lambda_0 = 2 \quad k = 1$			acero con $(\sigma/\rho)=2100 \text{ m}$
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max} \text{ (m)}$
$= \lambda_0$	2(1/=)	$(\sigma/\rho)/2$	210
$= 2\lambda_0$	2.5(2.00/0.50)	$(\sigma/\rho)/2.5$	168
12	6.17(6.00/0.17)	$(\sigma/\rho)/6.17$	68
24	12.08(12/0.08)	$(\sigma/\rho)/5.42$	35

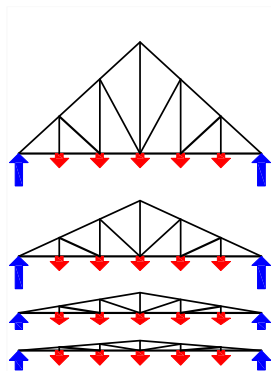
Cuadro 12: Resultados del tipo #11.



$\lambda_0 = 1,8619 \quad k = 0,9309$			acero con $(\sigma/\rho)=2100 \text{ m}$
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max} \text{ (m)}$
$= \lambda_0$	1.86(0.93/=)	$(\sigma/\rho)/1.86$	226
$= 2\lambda_0$	2.33(1.87/0.47)	$(\sigma/\rho)/2.33$	180
12	6.14(6/0.14)	$(\sigma/\rho)/6.14$	68
24	12.07(12/0.07)	$(\sigma/\rho)/12.07$	35

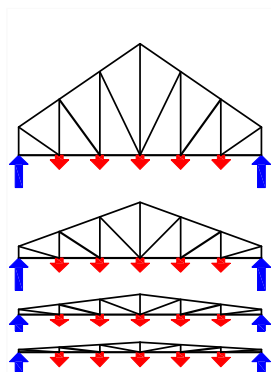
Cuadro 13: Resultados del tipo #12.





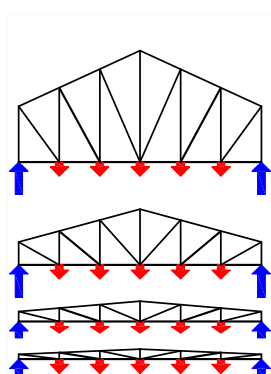
$\lambda_0 = 2,2039 \quad k = 1,0285$			acero con $(\sigma/\rho)=2100 \text{ m}$
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max} \text{ (m)}$
$= \lambda_0$	2.06(1.03/=)	$(\sigma/\rho)/2.06$	204
$= 2\lambda_0$	1.71(1.37/0.34)	$(\sigma/\rho)/1.71$	163
12	5.79(5.60/0.19)	$(\sigma/\rho)/5.79$	73
24	11.29(11.2/0.09)	$(\sigma/\rho)/11.3$	37

Cuadro 14: Resultados del tipo #13.



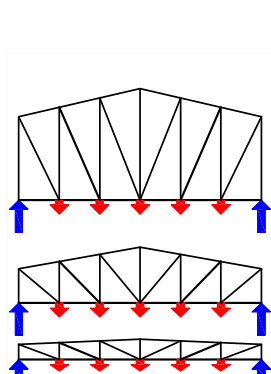
$\lambda_0 = 2,2206 \quad k = 0,7731$			acero con $(\sigma/\rho)=2100 \text{ m}$
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max} \text{ (m)}$
$= \lambda_0$	1.55(0.77/=)	$(\sigma/\rho)/1.55$	272
$= 2\lambda_0$	1.93(1.55/0.39)	$(\sigma/\rho)/1.93$	217
12	4.32(4.18/0.14)	$(\sigma/\rho)/4.32$	97
24	8.43(8.36/0.07)	$(\sigma/\rho)/8.43$	50

Cuadro 15: Resultados del tipo #14.



$\lambda_0 = 2,5462 \quad k = 0,7554$			acero con $(\sigma/\rho)=2100 \text{ m}$
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max} \text{ (m)}$
$= \lambda_0$	1.56(0.78/=)	$(\sigma/\rho)/1.56$	270
$= 2\lambda_0$	1.89(1.51/0.38)	$(\sigma/\rho)/1.89$	222
12	3.72(3.56/0.16)	$(\sigma/\rho)/3.72$	113
24	7.20(7.12/0.08)	$(\sigma/\rho)/7.20$	58

Cuadro 16: Resultados del tipo #15.

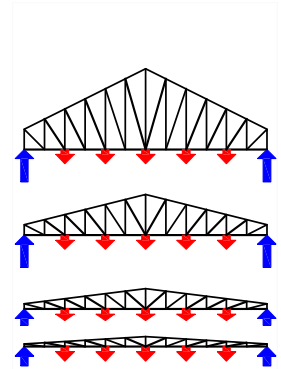


$\lambda_0 = 3,0789 \quad k = 0,8117$			acero con $(\sigma/\rho)=2100 \text{ m}$
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max} \text{ (m)}$
$= \lambda_0$	1.62(0.81/=)	$(\sigma/\rho)/1.62$	259
$= 2\lambda_0$	2.03(1.62/0.41)	$(\sigma/\rho)/2.03$	207
12	3.37(3.16/0.21)	$(\sigma/\rho)/3.37$	125
24	6.43(6.33/0.10)	$(\sigma/\rho)/6.43$	65

Cuadro 17: Resultados del tipo #16.

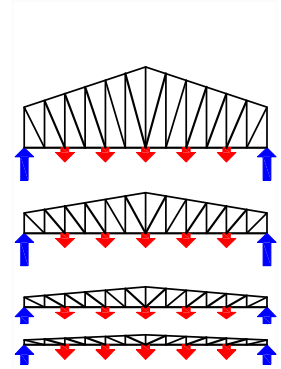
$\lambda_0 = 2,93 \quad k = 0,946$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
= λ_0	1.89(0.95/=)	(σ/ρ)/1.89	222
= $2\lambda_0$	2.36(1.89/0.47)	(σ/ρ)/2.36	178
12	4.11(3.87/0.23)	(σ/ρ)/4.11	102
24	7.86(7.75/0.12)	(σ/ρ)/7.86	53

Cuadro 18: Resultados del tipo #17.



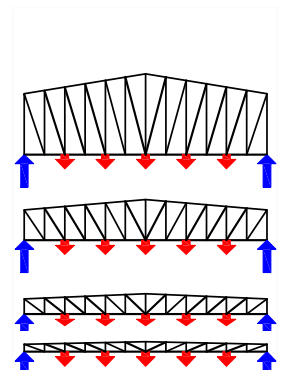
$\lambda_0 = 2,93 \quad k = 0,946$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
= λ_0	1.97(0.98/=)	(σ/ρ)/1.97	213
= $2\lambda_0$	2.46(1.97/0.49)	(σ/ρ)/2.46	171
12	3.56(3.26/0.30)	(σ/ρ)/3.56	118
24	6.67(6.52/0.15)	(σ/ρ)/6.67	63

Cuadro 19: Resultados del tipo #18.



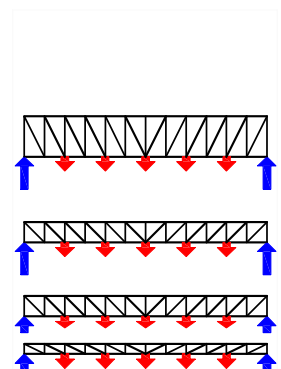
$\lambda_0 = 5,316 \quad k = 1,0872$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
= λ_0	2.17(1.09/=)	(σ/ρ)/2.17	193
= $2\lambda_0$	2.50(2.17/0.54)	(σ/ρ)/2.50	168
12	3.29(2.88/0.41)	(σ/ρ)/	3.29 128
24	5.96(5.76/0.21)	(σ/ρ)/5.96	70

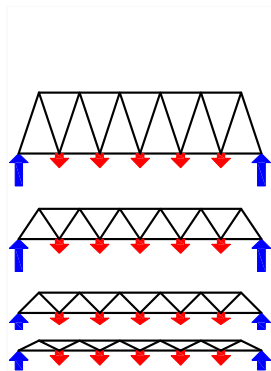
Cuadro 20: Resultados del tipo #19.



$\lambda_0 = 5,728 \quad k = 1,257$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
= λ_0	2.51(1.26/=)	(σ/ρ)/2.51	167
= $2\lambda_0$	3.14(2.51/0.63)	(σ/ρ)/3.14	134
12	3.23(2.63/0.60)	(σ/ρ)/3.23	130
24	5.57(5.27/0.30)	(σ/ρ)/5.57	75

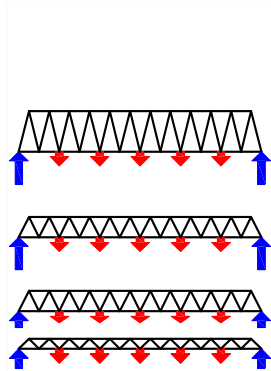
Cuadro 21: Resultados del tipo #20.





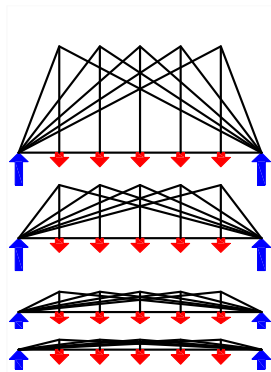
$\lambda_0 = 4,0503 \quad k = 0,8888$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
$= \lambda_0$	1.78(0.89/=)	(σ/ρ)/1.78	236
$= 2\lambda_0$	2.22(1.78/0.44)	(σ/ρ)/2.22	189
12	2.93(2.63/0.30)	(σ/ρ)/2.93	143
24	5.42(5.27/0.15)	(σ/ρ)/5.42	78

Cuadro 22: Resultados del tipo #21.



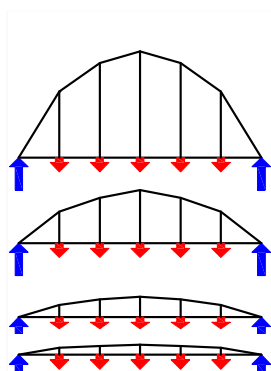
$\lambda_0 = 5,8985 \quad k = 1,2207$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
$= \lambda_0$	2.44(1.22/=)	(σ/ρ)/2.44	172
$= 2\lambda_0$	3.05(2.44/0.61)	(σ/ρ)/3.05	138
12	3.08(2.48/0.60)	(σ/ρ)/3.08	136
24	5.27(4.97/0.30)	(σ/ρ)/5.27	80

Cuadro 23: Resultados del tipo #22.



$\lambda_0 = 2,2678 \quad k = 0,8819$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
$= \lambda_0$	1.76(0.88/=)	(σ/ρ)/1.76	238
$= 2\lambda_0$	2.20(1.76/0.44)	(σ/ρ)/2.20	190
12	4.83(4.67/0.17)	(σ/ρ)/4.83	87
24	9.42(9.33/0.08)	(σ/ρ)/9.42	45

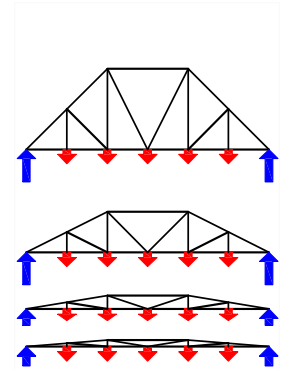
Cuadro 24: Resultados del tipo #23.



$\lambda_0 = 2,27 \quad k = 0,683$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
$= \lambda_0$	1.37(0.68/=)	(σ/ρ)/1.37	307
$= 2\lambda_0$	1.71(1.37/0.34)	(σ/ρ)/1.71	247
12	3.73(3.60/0.34)	(σ/ρ)/3.73	113
24	7.26(7.20/0.06)	(σ/ρ)/7.26	58

Cuadro 25: Resultados del tipo #24.

$\lambda_0 = 2,4914 \quad k = 0,8028$			acero con (σ/ρ)=2100 m
λ	$\mu(\mu_x/\mu_y)$	L_{max}	$0,2L_{max}$ (m)
$= \lambda_0$	1.61(0.80/=)	(σ/ρ)/1.61	262
$= 2\lambda_0$	2.01(1.61/0.4)	(σ/ρ)/2.01	209
12	4.03(3.87/0.17)	(σ/ρ)/4.03	104
24	7.82(7.73/0.08)	(σ/ρ)/7.82	54



Cuadro 26: Resultados del tipo #25.

5 Discusión

En la Fig. 2 se representa el valor μ que mide la eficacia de la solución (en ordenadas) para los diferentes tipos (referidos por su número en abscisas) para los cuatro valores de esbeltez estudiados.

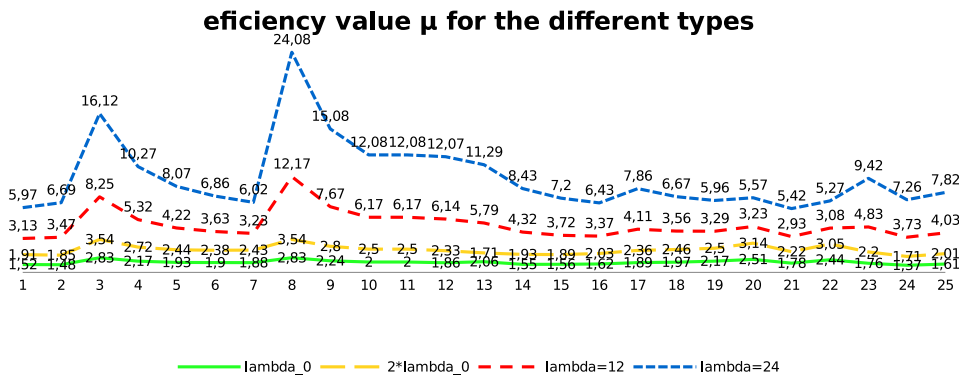


Figura 2: Eficacia μ (en ordenadas) para cada tipo (indicados por su número en abscisas) para los cuatro valores de esbeltez estudiados.

En la Fig. 3 se han representado los mismos valores de la Fig. 2, pero eliminando los peores soluciones, en concreto el tipo #3 y de la #8 a la #13.

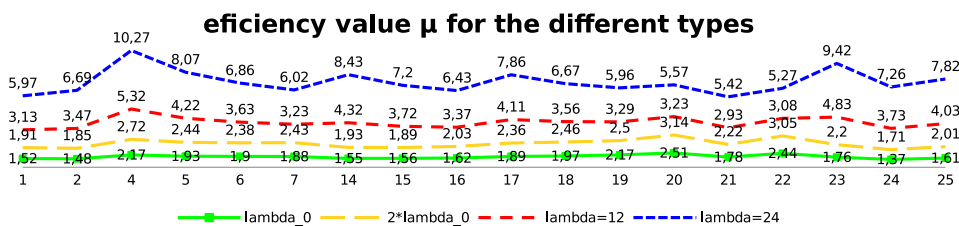


Figura 3: Eficacia μ (en ordenadas) para cada tipo (indicados por su número en abscisas) para los cuatro valores de esbeltez estudiados, eliminando los tipos #3 y del #8 al #13

En la Fig. 4 se representan los tipos #3 y #8 al #13.

Todos esos casos presentan el mismo problema: el ángulo que forma el cordón con el tirante es pequeño. Esta situación se hace más relevante en cuanto aumenta la esbeltez.

También resulta útil seleccionar los valores de eficacia de las soluciones con esbeltez óptima, como se muestra en las Fig. 5 y Fig. 6.

Los tipos #4, #19, #20 and #22 (ver Fig. 7) tiene eficacias intermedias. Aunque son distintas que los peores casos, no alcanzan la eficacia de las mejores soluciones.

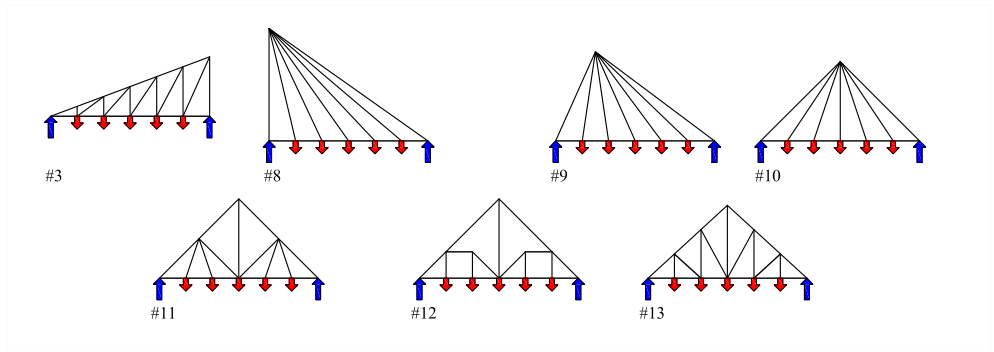


Figura 4: Soluciones menos eficaces eliminadas de la Fig. 2.

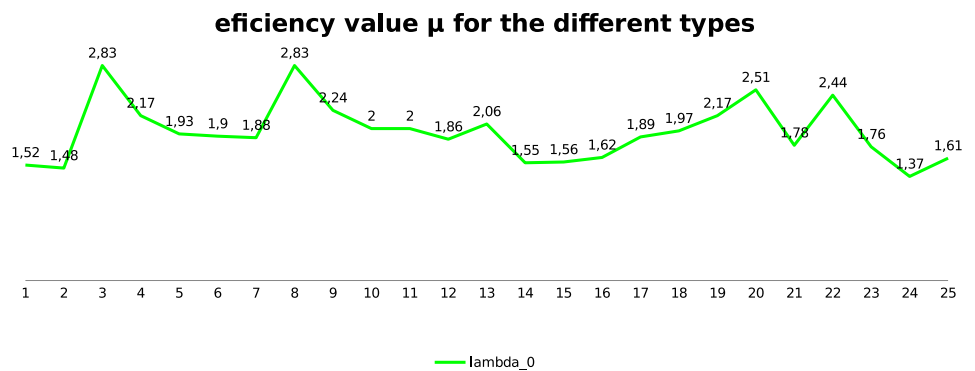


Figura 5: Eficacia μ (en ordenadas) para cada tipo (indicado por su número en abscisas) por la esbeltez óptima.

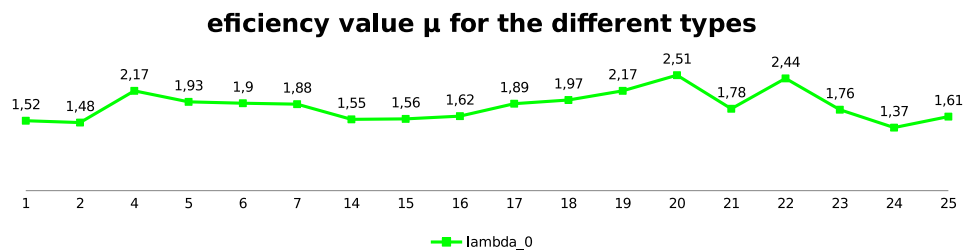


Figura 6: Eficacia μ (en ordenadas) para cada tipo (indicado por su número en abscisas) por la esbeltez óptima una vez eliminados los tipos #3 y del #8 al #13.

En este caso el problema está en el ángulo que forman las diagonales con los cordones. Para que la solución sea eficaz, ese ángulo tiene que estar entre 30° y 60° .

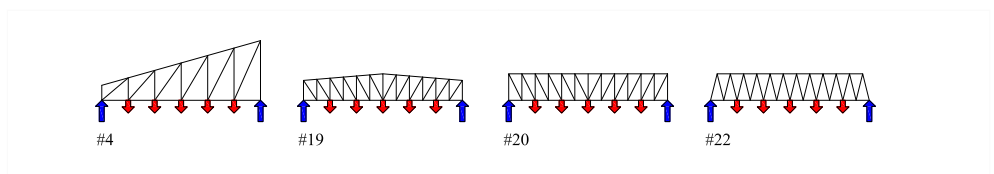


Figura 7: Types with an intermediate efficiency.

Eliminando los tipos #4, #19, #20 and #22 se obtiene un grupo de soluciones con pequeñas diferencias.

En la Fig. 8 se pueden ver las cuatro mejores soluciones. La diferencia entre ellas es pequeña, especialmente entre las celosías

Conviene recordar dos cuestiones importantes:

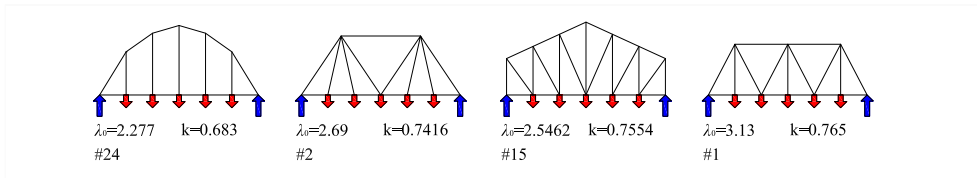


Figura 8: Esbeltez óptima de las cuatro soluciones más eficaces.

1. La cantidad de material únicamente representa una parte del coste de una estructura. En función del material y del tipo, su influencia puede suponer entre 1/3 y 1/4 del coste total. De ese modo, un proceso constructivo sencillo puede hacer más económico un esquema de una eficacia reducida. Por tanto, es importante tener presente que existen factores que pueden modificar las eficacias teóricas de los diferentes esquemas. Todo ello hace que la repercusión de la esbeltez sea mayor.
2. Por otra parte, el coste no es al único objetivo de la arquitectura. Es suficiente con alcanzar costes razonables, no necesariamente óptimos.

Por todo ello, las diferencias que aparecen en los resultados de la Fig. 2 pueden ser menores o incluso desaparecer en un caso real, especialmente cuando se consideran aspectos arquitectónicos.

Al aumentar la esbeltez no se mantienen los rangos de eficacia. Por ejemplo, comparando el mejor tipo, el #24 con el #22. Para una esbeltez $\lambda = 12$ el tipo #22 es ligeramente mejor y, para $\lambda = 24$ su eficacia es todavía mejor. De nuevo, esta situación está relacionada con el ángulo que forman las diagonales con el cordón horizontal en el apoyo en el tipo #24 al aumentar la esbeltez. El enunicado de Michell (Michel, 1904) afirma que es condición suficiente para obtener un mínimo que el ángulo que forman las barras en tracción y compresión sea de 90° . En el tipo #22 este ángulo está en torno a 60° , lo que permite aproximarse a una mejor solución.

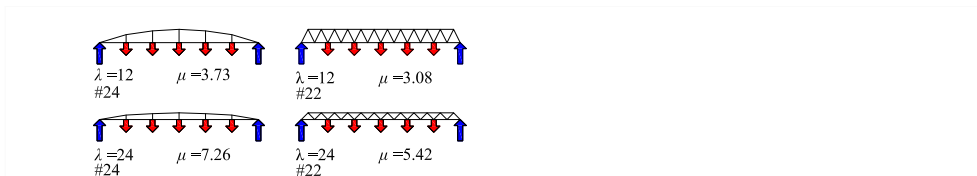


Figura 9: Comparación de los valores de μ entre los tipos #22 y #24 para esbelteces $\lambda = 12$ y $\lambda = 24$.

Por último, veamos la gran importancia que tiene la esbeltez. La comparación de dos buenos esquemas, el #24 y el #22 con el peor #3 y otro con una eficacia pequeña como el #10, cuando la esbeltez de los primeros es $\lambda = 24$ y la de los segundos $\lambda = 2\lambda_0$ se muestra en la Fig. 10. Se puede ver que, con una esbeltez adecuada, un esquema ineficaz supera con claridad otros esquemas mejores.

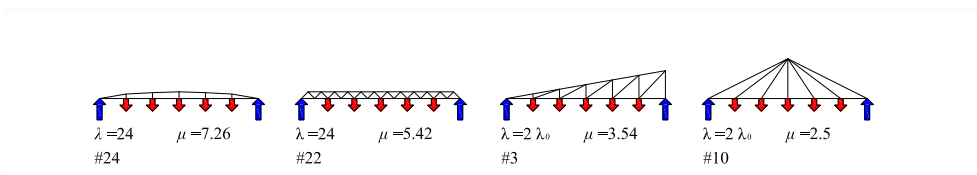


Figura 10: Comparación de los valores de μ que miden la eficacia de la solución entre los tipos #24 y #22 y el #3 y #10 para una esbeltez de $\lambda = 24$ y $\lambda = 2\lambda_0$ respectivamente.

Aunque en la siguiente sección se mostrarán y estudiarán varios ejemplos construidos, vamos a presentar dos obras maestras que responden a los tipos #3 y #10.

La primera es la capilla realizada en 1957 por Heikki y Kaija Siren en Otaniemi (Fig. 11); La estructura responde al esquema #3, el peor de los estudiados. Con una

esbeltez reducida se puede realizar el hueco que facilita la iluminación natural, así como la pendiente suficiente para garantizar la evacuación de la nieve.



Figura 11: Capilla en Otaniemi, Finlandia, 1957. Arquitectos: Heikki y Kaija Siren (© Ismael García Ríos).

El segundo es el proyecto de Alvar Aalto para el ayuntamiento de Säynätsalo; Se trata de un estructura que corresponde al tipo #10 aproximadamente, Pero con variación tridimensional, una modificación bastante racional.

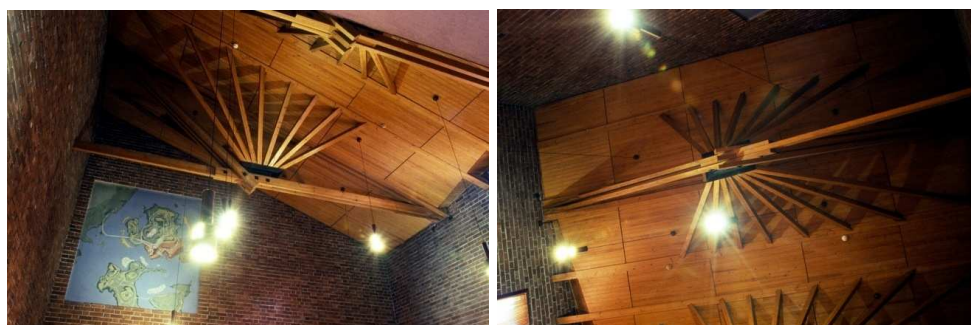


Figura 12: Estructura del techo del ayuntamiento de Säynätsalo, Finlandia, 1952. Arquitecto: Alvar Aalto (© Jose L Fernandez Cabo.)

Una obra maestra desde un punto de vista arquitectónico, con la esbeltez adecuada, puede ser además una solución eficaz (ver la Fig. 10) e incluso sencilla.

Una buena eficacia estructural no garantiza una buena solución arquitectónica. Pero los ejemplos anteriores demuestran que ambas cualidades pueden ser compatibles.

Puede ocurrir que para realizar una cubierta que se pueda elegir la esbeltez adecuada. Dado que en la edificación las luces del problema están en un rango medio bajo, el proyectista tiene en ese caso libertad para elegir el esquema

En los casos en que la esbeltez está limitada (como suele ocurrir), elegir esquemas similares al #22, con cordones paralelos, y con diagonales inclinadas respecto a los cordones con ángulos en torno a 60° , permite obtener buenas soluciones. Sin embargo, y como se verá en la sección siguiente, existen multitud de condiciones que modifican el rango de buenas soluciones. Por ejemplo, en casos de luces cortas y esbelteces elevadas, los perfiles laminados son la mejor solución desde el punto de vista económico, como se puede ver en la construcción de pórticos.

6 Estructuras construidas: una visión crítica

En el ejercicio propuesto se estudian casos elementales con hipótesis básicas. Sin embargo, al enfrentarse a la definición de un proyecto es necesario tener en cuenta muchas más variables. En este apartado se estudian diferentes obras que ayudarán a situar las conclusiones del ejercicio en un contexto profesional.

El ejercicio se ha planteado con un esquema de cinco cargas puntuales. Aunque en la realidad, en general, tendremos cargas uniformemente repartidas, siempre es posible simplificarlo reduciendo la carga total a un número limitado de cargas puntuales. Su

número depende del tipo de problema, pero como veremos en los siguientes ejemplos, es siempre reducido.



Figura 13: Paso elevado cerca de Galapagar, Madrid, España, 1966. Ingenieros: Carlos Fernández Casado, Leonardo Fernández Troyano and Javier Manterola Armisen (© Jose L Fernandez Cabo).

En la figura 13 se muestra el paso elevado próximo a Galapagar, en Madrid, de 48 m de luz. El tablero es de sección variable, desde 0,60 m en los estribos, 1,60 m en los soportes y 0,80 m en el centro del vano.

En la dirección <http://www.cehopu.cedex.es/cfc/obras/FC-123.htm>, se pueden consultar información del proyecto. El esquema general de la estructura es el de un funicular de tres cargas puntuales. Y la forma del tablero varía de acuerdo con los esfuerzos de flexión. En estructuras de edificación, 48 m de luz es un tamaño medio.



Figura 14: Puente del Infante D. Henrique, Oporto, Portugal. Ingeniería: IDEAM and Adão da Fonseca & Associados, SA. 1999 - 2002. (© Jose L Fernandez Cabo).

En la figura 14 se muestra el puente Infante D. Enrique de Oporto con 280 m de luz. En este caso, el esquema de la estructura es el de un funicular de ocho cargas puntuales, similar al de obras de Robert Maillart y Christian Menn. Cada tramo del arco tiene una esbeltez elevada, 186 que lo hace extraordinario. La solución es posible gracias a la esbeltez de la viga del tablero de 62. La esbeltez del arco es de 11 (en los casos habituales está entre 5 y 8).

Aunque los autores eran conscientes del desafío que suponía esta solución, la aceptaron por razones estéticas.

Los dos ejemplos anteriores muestran como se puede concentrar la carga total en un número limitado de cargas puntuales. Cosa que también ocurre en las estructuras de edificación. En la figura 15 se muestra la cubierta de la estación de Zürich, en la que el esquema estructural es el de un arco con dos cargas puntuales. El canto total del arco permite asegurar la resistencia para distintas combinaciones de carga.

En la práctica, las cargas son variables y para obtener diseños óptimos es preciso tener en cuenta diferentes casos de carga. Por esa razón resulta una buena estrategia adoptar esquemas sencillos.



Figura 15: Estación de Zürich, Switzerland (© Jose L Fernandez Cabo).

Esa es la razón por la que los esquemas óptimos obtenidos a partir de los enunciados de Michell no resultan serlo en la práctica.



Figura 16: Grúa en la construcción de un paso elevado sobre una autopista en Francia. a) Vista general; b) detalle de la esquina superior; c) esquema de Michell de la estructura de la esquina (© Jose L Fernandez Cabo).

En la figura 16 se puede ver una grúa empleada para la construcción de un paso elevado en una autopista. En un tipo de estructura, esencialmente funcional, como esta, se puede utilizar un diseño óptimo. Y en parte ocurre. En efecto, su esbelteza es próxima a la óptima, la pendiente de las diagonales que soportan el voladizo está entre 30° y 45° , y un esquema eficaz permite soportar el voladizo figura 16 b. El esquema de Michell para la esquina de la estructura se muestra en la figura 16 c. La complejidad de la construcción y el efecto del pandeo hacen que la solución construida sea más cara. El canto de la celosía espacial es suficiente para soportar la carga móvil.



Figura 17: Puente sobre el río Grijalva en Villahermosa, Tabasco, Mexico, 116 m de luz (izquierda). Ingenieros: Carlos Fernández Casado S.L. 2001; © Carlos Fernández Casado SL; esquema de Michell para una viga con dos voladizos y carga continua (derecha).

En la figura 17 (izquierda) se muestra otro puente con soportes inclinados. La organización del puente en tres tramos permite realizar un diseño eficaz, con un esquema próximo al óptimo propuesto por Michell para un doble voladizo sometido a una carga uniformemente distribuida (ver figura 17 derecha). Se puede apreciar que el vano intermedio es mayor que la suma de los dos laterales, con el fin de evitar que los cables puedan descargarse en casos de carga asimétricos.

Los ejemplos anteriores permiten explicar porqué en el puente de la figura 18 la pila está inclinada hacia el vano, permite que el ángulo que forman los cables con el tablero no sea menor que 30° . En la figura 18 (derecha) se puede ver el tablero del puente que tiene que soportar esfuerzos de torsión elevados en los casos de carga



Figura 18: Puente sobre la autopista A-6 cerca de Las Rozas, Madrid, 107 m de luz, 2006. Ingenieros: Arenas y Asociados. (© Jose L Fernandez Cabo).

asimétricos en que únicamente uno de los lados del puente esté cargado. De nuevo estamos ante el caso en que se elige el esquema de la estructura atendiendo al caso de carga más relevante y no para todos los posibles.



Figura 19: Alvar Aalto. Cubierta de la universidad de Jyväskylä, Finlandia. 1951-7. (© Jose L Fernandez Cabo).



Figura 20: Cubierta del aserradero de Valsaín (izquierda), Segovia, España; Puente Vihantatalmi, Finlandia (derecha). (© Jose L Fernandez Cabo).

En las figuras 19 y 20 se muestran unos ejemplos con un esquema poco eficaz, pero al realizarlos con una esbeltez adecuada, $\lambda_0 < \lambda < 2 \cdot \lambda_0$, se consigue una estructura adecuada.

En la figura 21 se muestra un puente cuya estructura tiene un esquema similar al tipo #12. Aunque el esquema no es de los más eficaces, el que la esbeltez sea la adecuada junto con el uso del pretensado hace que la solución si lo sea. Más aún si la comparamos con la solución de tablero de hormigón armado sin tirante exterior pretensado.



Figura 21: Puente en Osomort, Barcelona, España. 13 vanos de 40 m de luz. Ingenieros: Carlos Fernández Casado SL. 1994-95. (© Jose L Fernandez Cabo).

Durante la segunda mitad del siglo XIX, y de modo empírico más que teórico, se establecieron las reglas que permitían diseños de celosías eficientes. En la figura 22 se muestra una obra maestra de la arquitectura industrial. El edificio Boots proyectado por Owen Williams entre 1930 y 1932. La esbeltez de la celosía está en torno a 9 y la inclinación de las diagonales a 45°.



Figura 22: Fábrica Boots. Proyecto de Owen Williams, 1930-32, Nottingham, UK. (© Jose L Fernandez Cabo).

En las figuras 23 y 24 se muestran dos obras de tamaño medio. En ambas se siguen las recomendaciones que se han comentado con una esbeltez $\lambda_0 \leq \lambda \leq 2 \cdot \lambda_0$.



Figura 23: Ciudad de las ciencias y de la industria, parque de la Villette, Paris. (© Jose L Fernandez Cabo).



Figura 24: Media TIC, Barcelona. Arquitecto: Enric Ruiz Geli; Estructura: Agustí Obiols, BOMA, 2009 (© Jose L Fernandez Cabo).

En los casos en que el ángulo que forman el cordón superior y el tirante es pequeño, se reduce la eficacia del esquema, aunque se emplee una esbeltez adecuada. En la figura 25 se muestra un ejemplo en que esa desventaja se corrige con el postesado del cordón inferior gracias al empleo de acero de alta resistencia.



Figura 25: Centro de exposiciones en Hannover, Alemania, 122 m de luz. Arquitecto: Gerkan, Marg und Partner. Estructura: Schlaich Bergermann and partner, 1995. (© Jose L Fernandez Cabo).



Figura 26: Puente en Evenstand, Noruega. Ingeniero: Otto Kleppe (© Jose L Fernandez Cabo).

En la figura 26 se muestra puente con un esquema de los más eficaces, similar al tipo #15, en el que el cordón superior sigue un trazado curvo. Con el fin de evitar el empleo de uniones complejas, el cordón superior es curvo y no poligonal. La ventaja constructiva que esto supone compensa con creces la aparición de flexiones en los tramos del cordón superior. Se trata de una buena solución, empleada tradicionalmente. El arco es tipo más utilizado históricamente para estructuras de tamaño medio (que en su momento pudieron ser luces excepcionales).

El puente Kubel (Fig. 27) cercano a St. Gall y proyectado por Hans Grubenmann en 1780 tiene un esquema similar al tipo #24, el más eficaz. Tiene un vano de unos 30 m de longitud. En este caso, la forma poligonal está justificada por el empleo de madera aserrada. A la estructura principal se superpone una de barras que permite equilibrar las cargas que no responden a la forma funicular. Se trata de una obra excepcional.



Figura 27: Puente Kubel próximo a St. Gall, Suiza, 1780; proyecto de Hans Grubenmann (© Jose L Fernandez Cabo).

En la figura 28 se muestra un ejemplo contemporáneo similar. En este caso, los elementos secundarios, de unos 10 m de luz se resuelven con un elemento tipo Bowstring realizados con madera y acero. La resistencia a flexión de las vigas de madera permite equilibrar las cargas que no corresponden al funicular. Se trata de una estructura sencilla y eficaz.

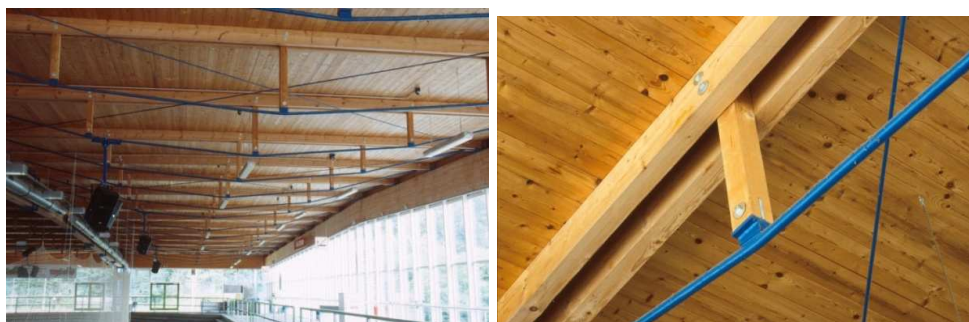


Figura 28: Pista de hielo cubierta en Memmingen, Alemania. Arquitecto: Börner und Pasmann, Memmingen. Estructura: Schlaich Bergermann and partner 1988 (© Jose L Fernandez Cabo).

En ocasiones, los buenos esquemas pueden ser complejos. Las celosías Ardant, que combinaban arcos con las viguetas de las cubiertas convencionales, se utilizaron en la segunda mitad del siglo XIX y competían con las celosías polonceau. En la figura 29 se muestra el primer arco de madera laminada construido en Europa (1864-1865). El alma se construye con fundición, madera y barras de acero.



Figura 29: Cubierta del German Gymnasium, Londres, UK, 1864-65 (© Jose L Fernandez Cabo).

Un esquema tipo bowstring como el que se muestra en la figura 30 es eficaz, sobre todo si la esbeltez es la adecuada. En este caso, el tirante está formado por barras de acero, con lo que simplifica la construcción de los arranques. Por otra parte, la solución del alma de la viga puede simplificarse utilizando menos elementos y mayores dimensiones en el cordón superior, como se ve en la solución de la figura 28.



Figura 30: Cubierta de polideportivo de 60 m de luz, resuelta con vigas bowstring de madera y acero (© Jose L Fernandez Cabo).

Para construir una cubierta siempre es necesario un revestimiento. Se pueden utilizar chpas de acero conformadas que formen la subestructura, bien tomando la forma de arco o incluso de cáscara (utilizando más de una placa). A continuación se muestran dos ejemplos.

El primer ejemplo es la nueva cubierta de la estación de tren de Leuven (Fog. 31).



Figura 31: Cubierta de la estación de Leuven, Belgica (© Jose L Fernandez Cabo).

El segundo caso es la modesta cubierta que se muestra en la figura 32. La cubierta

consiste en unas chapas conformadas que, gracias a su canto, se asegura la rigidez para evitar inestabilidades locales y se puede salvar una luz de 12m sin apenas otros elementos.



Figura 32: Covertizo, Vicálvaro, Madrid (© Jose L Fernandez Cabo).

En muchos casos, los proyectos relevantes son complejos, como ocurre con el mercado de Santa Catalina que se muestra en las figuras 33 y 34. El objetivo del proyecto era crear una cubierta ondulada recubierta de piezas cerámicas. Las generatrices de las formas curvas de la cubierta siguen la dirección longitudinal del edificio, perpendicular a la luz más corta. En esa dirección se disponen los arcos que soportan la cubierta y cuya forma no sigue el dibujo de las ondulaciones, como se puede ver en la figura 33. Los arcos se realizan con celosías espaciales, tienen una esbeltez adecuada, están pretensados a nivel de los arranques y tiene el canto suficiente para resistir las flexiones que se puedan producir por cargas distintas de las funiculares.



Figura 33: Mercado de Santa Caterina, Barcelona, Spain. Arquitecto: Enric Miralles; ingeniero: José María Velasco, AMATRIA (© Jose L Fernandez Cabo (left); (© Joaquín Montón (right)).

Como se puede ver en las figuras 33 derecha y 34 izquierda, la directriz de las vigas secundarias es una línea quebrada, lo que no supone ningún inconveniente, ya que están colgadas de los arcos. La lógica de la estructura únicamente se descompone en algunos puntos, como en el apoyo sobre los soportes de la fachada principal (ver la figura 34 derecha), aunque eso no supone un incremento de coste comparado con el montante de la obra.

En este caso es evidente que se puede proyectar una estructura más económica, pero la solución construida permite resolver una propuesta arquitectónica de gran interés solucionando las dificultades de manera racional.

En los casos estudiados en la sección 4 no se han tenido en cuenta cuestiones de inestabilidad local o global. Hacerlo supone siempre un incremento de material sobre el teórico obtenido. Una manera de evitarlo es el empleo de estructuras tensadas como se hace en los proyectos de grandes luces. Los grandes puentes colgantes son un ejemplo de ello.

En casos de luces menores, con un arco se pueden obtener soluciones eficaces. Mo-



Figura 34: Mercado de Santa Caterina, Barcelona, España. Arquitecto: Enric Miralles; ingeniero: Jose María Velasco (© Jose L Fernandez Cabo).

dificando ligeramente el esquema se consigue resolver el problema de la inestabilidad que es la principal dificultad que presentan. En la figura 35 se muestra una solución clásica de gran eficacia, el arco. La ligera curvatura del tirante, que está conectado con el arco mediante una serie de cables, permite reducir el problema de inestabilidad en el plano vertical. Con una ligera inclinación de los dos arcos y su conexión mediante una serie de barras, se consigue la estabilidad transversal.



Figura 35: Arco con cables de la pasarela peatonal del Anillo Verde cerca de la fuente del berro, Madrid (© Jose L Fernandez Cabo).

7 Conclusiones

Los ejemplos presentados muestran que dado un esquema estructural, se puede evaluar fácilmente su peso propio, la luz máxima y la eficacia de una esbeltez determinada. También se puede tener en cuenta la influencia de la inestabilidad local suponiendo un factor de mayoración para las barras comprimidas. Por otra parte, las piezas de unión pueden incrementar el peso total entre un 10% y un 20%, pero en los ejemplos estudiados no se ha tenido en cuenta.

Los resultados obtenidos muestran que la esbeltez es el parámetro geométrico fundamental para determinar la eficacia estructural. El esquema elegido únicamente resulta determinante para grandes luces, e incluso en esos casos, es necesario que la esbeltez sea la adecuada.

Con una esbeltez adecuada, una solución óptima se obtiene disponiendo las barras del alma con una inclinación en torno a 45° respecto a la horizontal. Una mayor esbeltez supone un aumento del número de barras que conectan los cordones superior e inferior.

El estudio de estructuras construidas debe incluir la consideración de múltiples variables, por ejemplo, cuestiones constructivas. El hacerlo permite situar las conclusiones del ejercicio en un contexto real, mostrando la repercusión que tiene el manejo

de esas variables. En general, es importante recurrir a esquemas sencillos y, por otra parte, técnicas como el pretensado pueden aumentar la eficacia de un esquema.

En el artículo se muestran algunas obras maestras realizadas con esquemas estructurales poco eficaces, lo que demuestra que una buena solución resuelve un problema complejo en que se tienen en cuenta un gran número de variables. La eficacia estructural no asegura un buen resultado arquitectónico, pero se pueden compatibilizar ambos objetivos.

8 Bibliografía

Aroca Hernández-Ros, Ricardo. 1989/1990. "Structure, Geometry and proportion". (Apuntes del Curso de Doctorado). *ETSAM, Madrid*. (Manuscript in Spanish).

Aroca Hernández-Ros, Ricardo. 1992/1993. "Structure, Geometry and proportion". (From a course for Ph. D students in Mexico). *ETSAM, Madrid*. (Manuscript in Spanish).

Aroca Hernández-Ros, Ricardo. 2002/2011. "Structures of minimum weight". Hand notes of the course La Estructura en el Proyecto Arquitectónico. *ETSAM, Madrid*. (Manuscripts in Spanish).

Fernandez Cabo, Jose L. 2012. *Matriz de equilibrio de estructuras trianguladas de barras articuladas con cargas en los nodos*. E.T.S. Arquitectura (UPM), Madrid. (in Spanish) <http://oa.upm.es/10742/>

MATALB®. MathWorks Co. <http://www.mathworks.com> MATALB®. MathWorks Co. <http://www.mathworks.com>

Maxwell, James Clerk. 1927 (1890) "On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Forces.". *Scientific Papers (From the Transactions of the R. S. of Edinburgh; Vol. XXVI; pp. 21-23); ed.; Paris*. Librarie Scientifique J. Hermann. pp. 161-177.

Michell, A.G.M. 1904. "The Limits of Economy of Material in Frame-Structures". *Philosophical Magazine.S.6*. Vol. 8; n° 47. Nov. pp. 589-597.

9 Appendix A script implemented in MATLAB® (release 2010).

```
% The script firstly computes the internal forces of statically %
% determinate 3D wire -frame pin -jointed structures with point loads at %
% determinate 3D wire-frame pin-jointed structures with point loads at %
% nodes by means of assembling the equilibrium matrix. Direction of %
% restrains are limited to global axis. %
% Quantity of material, optimum slenderness and maximum size are then %
% derived %
% ----- %
clc %clear command windows
clear %clear variables
% ----- %
% INPUT OF general data needed for initializing variables
% ----- %
Num_Nod=3 % total number of nodes
Num_Bar=3 % total number of elements or bars
d=1 % auxiliary parameter, usually the total depth of the structure
omega=1 % assumed buckling factor
% ----- %
% initialization of variables
% ----- %
H_t=zeros(Num_Nod*3,Num_Bar); % equilibrium matrix without restrains
Coor_Nod=zeros(Num_Nod,3); % matrix with the coordinates of the nodes
Coac_Nod=zeros(Num_Nod,3); % matrix with the restrains in global axis
Coac_Nod_Vec=zeros(Num_Nod*3,1); % restrains in vector form
Equil_List=1:1:Num_Nod*3; % active Degrees of Freedom (DoF)
Conec_Nod=zeros(Num_Bar,2); % Connectivitymatrix
Conec_Nod=zeros(Num_Bar,2); % Connectivity matrix
Cos_Dir_Bar=zeros(4,Num_Bar); % cosine directors and length of the members
P_t=zeros(Num_Nod*3,1); % nodal load vector without considering restrains
% ----- %
% INPUT of particular data
% ----- %
% nodal coordinates in global axis X,Y,Z
Coor_Nod=[0,0,0; ...
          1,1,0; ...
          2,0,0]
% restrains in global axis X,Y,Z, 0= restrained, 1=free
Coac_Nod=[0,0,0; ...
          1,1,0; ...
          1,0,0]
% connectivity matrix
Conec_Nod=[1,2; ...
          1,3; ...
          2,3]
% nodal load vector without considering restrains
P_t(5)=-1
% ----- %
% NO INPUT DATA ARE REQUIRED FROM HERE
% ----- %
% ----- %
% loading restrains in vector form
% ----- %
for i=1:1:Num_Nod
Coac_Nod_Vec(3*i-2)=Coac_Nod(i,1);
Coac_Nod_Vec(3*i-1)=Coac_Nod(i,2);
```

```

Coac_Nod_Vec(3*i)=Coac_Nod(i,3);
end
% load the location of restraints in the vector List_Coac
j=0;
for i=1:1:Num_Nod*3
    if Coac_Nod_Vec(i)==0
        j=j+1;
        Coac_List(j)=i;
    end
end
% active DoF where equilibrium is established
Equil_List=setdiff(Equil_List,Coac_List)
% cosine directors l,m,n in the first three rows, the fourth one is % used for the length
of the bar.
for i=1:1:Num_Bar
    ini=Conec_Nod(i,1);
    fin=Conec_Nod(i,2); % initial and final node of a bar
    Cos_Dir_Bar(4,i)=(((Coor_Nod(fin,1)-Coor_Nod(ini,1))^2+(Coor_Nod(fin,2) ...
        -Coor_Nod(ini,2))^2+(Coor_Nod(fin,3)-Coor_Nod(ini,3))^2)^0.5; %length
    Cos_Dir_Bar(1,i)=(Coor_Nod(fin,1)-Coor_Nod(ini,1))/Cos_Dir_Bar(4,i);
    Cos_Dir_Bar(2,i)=(Coor_Nod(fin,2)-Coor_Nod(ini,2))/Cos_Dir_Bar(4,i);
    Cos_Dir_Bar(3,i)=(Coor_Nod(fin,3)-Coor_Nod(ini,3))/Cos_Dir_Bar(4,i);
end
for j=1:1:Num_Bar
    ini=Conec_Nod(j,1);
    fin=Conec_Nod(j,2); %initial and final node of a bar
    H_t(3*ini-2,j)=-Cos_Dir_Bar(1,j);
    H_t(3*ini-1,j)=-Cos_Dir_Bar(2,j);
    H_t(3*ini,j)=-Cos_Dir_Bar(3,j);
    H_t(3*fin-2,j)=Cos_Dir_Bar(1,j);
    H_t(3*fin-1,j)=Cos_Dir_Bar(2,j);
    H_t(3*fin,j)=Cos_Dir_Bar(3,j);
end
% ----- %
% Assemblage of equilibrium matrix considering now the restrains
% ----- %
H=H_t(Equil_List,:);
COND_H=cond(H) % used to check if the matrix H were singular
% ----- %
% vector with nodal forces considering now the restrains
% ----- %
P=P_t(Equil_List)
% ----- %
% solve the linear system of equations
% ----- %
N=H\P;
% ----- %
% print the internal forces
% ----- %
num=1:1:Num_Bar;
esfuerzos=[num N] % print displacements
% ----- %
% Compute the quantity of material, W, including the buckling if defined at previous
data
% ----- %
N_w=N;
for i=1:Num_Bar
    if N_w(i)<0
        N_w(i)=N_w(i)*omega;
    end
end

```

```

    end
end
L=Cos_Dir_Bar(4,:);
W=dot(L,abs(N_w))
% ----- %
% Compute the components x,y,z of the quantity of material;
% Wx Wy and Wz respectively
% ----- %
Wx=0; Wy=0; Wz=0;
for i=1:Num_Bar
    Wx=Wx+abs(L(i)*N(i)*Cos_Dir_Bar(1,i)^ 2);
    Wy=Wy+abs(L(i)*N(i)*Cos_Dir_Bar(2,i)^ 2);
    Wz=Wz+abs(L(i)*N(i)*Cos_Dir_Bar(3,i)^ 2);
end
Wx Wy Wz
% ----- %
% Compute the Form Factor with and additional operation by the user
% ----- %
fact_esquema_k_2D=(Wx*Wy)^ 0.5
disp( divide that value by the total load and by the span )
% ----- %
% Compute the Optimal Slenderness with and additional operation by the user
% ----- %
esbelez_opt_2D=(Wy/Wx)^ 0.5
disp( multiply that value by the current slenderness )
% ----- %
% Draw structure (at its initial stage)
% ----- %
figure
hold on
for i=1:Num_Bar
    conect=Conec_Nod(i,:);
    xcoord = [Coor_Nod(conect(1),1) Coor_Nod(conect(2),1)];
    ycoord = [Coor_Nod(conect(1),2) Coor_Nod(conect(2),2)];
    zcoord = [Coor_Nod(conect(1),3) Coor_Nod(conect(2),3)];
    line(xcoord,ycoord,zcoord);
end
axis equal ; axis tight ;
axis([-1 (max(Coor_Nod(:,1))+1)-1 max(Coor_Nod(:,2))+1 -1 max(Coor_Nod(:,3))+1]);

hold off
figure(gcf)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% This Matlab code was written by Jose L Fernandez-Cabo, Department of %
% Building Structures, Universidad Polit cnica de Madrid, Avenida Juan de %
% Herrera 4, 28040, Madrid. %
% Any comment can be sent to: jose.fcabo@upm.es %
% The theoretical basis can be viewed at http://oa.upm.es/10742/, even though %
% the document is in Spanish and the program is implemented in MAPLE. %
% This code is intended for educational purposes. %
% Disclaimer: %
% The author reserves all rights but does not guarantee that the code is %
% free from errors. Furthermore, he shall not be liable for any event %
% caused by the use of the program. %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

