







Uso de modelos de cálculo didácticos en la estructura axilsimétrica del cenotafio de Newton

Use of didactic calculation models in the axilsimetrical structure of Newton's cenotaph

Julian Chaur González¹, Jorge Nieto Andrade², Manuel Esteban Barba Delgado³*

Recibido: 05/05/2017 | Aceptado: 17/11/2017 | Fecha de publicación: 31/12/2017 DOI:10.20868/abe.2017.3.3670

TITULARES

- Aplicación didáctica de programas de cálculo geométricos.
- Estabilidad geométrica y estructural de modelos arquitectónicos utópicos.
- Modelos estructurales históricos y teóricos como herramienta mucho más visible y didáctica

HIGHLIGHTS

- Didactic application of geometric calculation programs.
- Geometric and structural stability of utopian architecture models.
- Historical and theoretical structural models as a much more visible and didactic tool.

¹ Escuela Técnica Superior de Arquitectura. Universidad Politécnica de Madrid. Madrid, España,

^{*} Corresponding author email: mebd90@gmail.com

RESUMEN

El trabajo desarrollado consiste en la formalización y comprobación ante hipótesis de carga de una bóveda axilsimétrica no construida. Esta bóveda es un proyecto utópico del arquitecto Louis Etienne Boullée, arquitecto francés con un volumen de obra muy significativo de carácter casi "surrealista". La obra de este autor alcanza normalmente unas proporciones titánicas y carentes de ornamento, basando sus formas principalmente en volúmenes geométricos sencillos. El proyecto que nos atañe será el cenotafio de Isaac Newton, una gigantesca bóveda axil simétrica con un espesor muy reducido en algunos puntos. Con el uso del programa de cálculo Maple, un programa de ánalisis matemático combinado con la tecnología CAD/CAM basada en los dibujos existentes de este proyecto comprobaremos la estabilidad geométrica y estructural de esta bóveda de proporciones titánicas. Con esto mostraremos las posibilidades de aplicación de los programas de cálculo geométrico a los modelos estructurales históricos y teóricos, como una herramienta mucho más visible y didáctica que los cálculos numéricos al uso. La visualización de los esfuerzos que resultan en las diferentes dovelas de la bóveda, conjuntamente con la comprensión y constatación del funcionamiento axil simétrico del modelo será determinante a la hora de comprender el funcionamiento de este sistema estructural y resolverá la duda que nos atañe. ¿Se podría construir el cenotafio de Newton? ¿Es una construcción estable geométrica y materialmente?

Palabras clave: Herramientas docentes, Maple, axilsimetría, boullée, utopía, arquitectura.

ABSTRACT

The work developed in this paper consists in the formalization and verification of the load hypothesis of a non-constructed axilsymmetric vault. This vault is a utopian project by the architect Louis Etienne Boullée, French architect with a very significant volume of work of "surrealist" character. The works topic of this author usually resembles itself in buildings of titanic proportions and devoid of ornament, that base their forms mainly on simple geometric volumes. The project that concerns us will be the Isaac Newton cenotaph, a giant axial symmetric vault with a very small thickness in some points. With the use of the Maple calculation program, a mathematical analysis program combined with CAD / CAM technology based on the existing drawings of this project, we will check the geometric and structural stability of this vault. With this we will show the possibilities of application of the geometric calculation programs to historical and theoretical structural models, as a much more visible and didactic tool than the usual numerical calculations. The visualization of the efforts that result in the different keystones of the vault, together with the understanding and verification of the axial symmetrical functioning of the model, will be decisive when understanding the functioning of this structural system and will resolve the main doubt that concerns us. Could Newton's cenotaph be built? Is it geometrically and materially speaking a stable construction?

Keywords: Teaching tools, maple, axilsimmetry, boullée, utopia, architecture.

1. INTRODUCCIÓN

Durante el desarrollo de la asignatura de estabilidad y métodos estático- gráficos del MUCTEH. trabajamos diferentes máster hipótesis en estructuras de fábrica mediante el uso del software de cálculo Maple. Este software es líder en análisis matemático capaz de realizar cálculos simbólicos, algebraicos y de algebra computacional. Mediante la obtención de un modelo de análisis estructural podríamos poner en un contexto claro y someter a una dosis de realidad a este proyecto para así establecer una línea de investigación para analizar la viabilidad de los proyectos utópicos de este arquitecto.

El autor en cuestión es Étienne-Louis Boullée (1728 - 1799) arquitecto neoclásico cuyo legado y obra influyó considerablemente en los arquitectos de más de un siglo después.

Es a su vez hijo de arquitecto y tras estudiar pintura se pasa a la arquitectura. En 1762 entra a formar parte de la Academia real de arquitectura de París y se convirtió en el arquitecto jefe de Federico II el Grande de Prusia, un título en gran medida honorario. Diseñó una serie de casas particulares desde 1762 hasta 1778, aunque la mayor parte de ellas ya no existen; entre los ejemplos supervivientes destacan el Hôtel Alexandre y Hôtel de Brunoy, ambos en París.

Su mayor impacto lo provocó como maestro y teórico en la École Nationale des Ponts et Chaussées entre 1778 y 1788, desarrollando un estilo geométrico abstracto distintivo, especialmente importante por la racionalidad de sus propuestas. Su obra utópica se caracterizó por la eliminación de toda la ornamentación innecesaria haciendo gala de un racionalismo exacerbado, hinchando las formas geométricas hasta una escala enorme y la repetición de elementos.

Boullée tuvo ideas más propias de los posmodernos del siglo XX como Aldo Rossi, y promovió la idea de hacer arquitectura expresiva de su propósito, una doctrina que sus detractores llamaron arquitectura parlante.

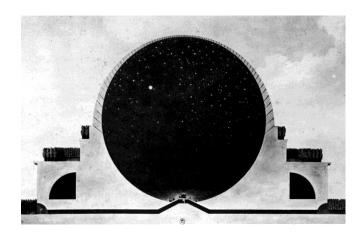


Fig. 1. Vista exterior diurna del Cenotafio de Newton.

Aunque Boullée realizó diferentes propuestas de carácter titánico, racionalista y utópico, el edificio objeto de este trabajo es sin duda su obra más celebre (figuras 1 y 2). Concebido en 1784 tras la muerte de Isaac Newton. El proyecto consiste en una gran esfera de 120m de altura sobre un podio y rodeada de cipreses con vocación de representar la esfera celeste y el cosmos bajo el que se sitúa Newton. A este proyecto se accede por la base y, a pesar de su tamaño, sólo se puede ocupar interiormente en un área reducida de esta base. Su superficie se encuentra hábilmente perforada para que durante el día los rayos de luz entren en su interior y parezca la imagen nocturna de la bóveda celeste. De noche un gran foco de luz artificial en su centro reproduce la imagen diurna, generando distopías temporales que condicionen la percepción del cosmos como un continuo en torno a la divinización de Isaac Newton. Exteriormente sólo se ve la mitad de la esfera, apoyada en dos cilindros. Alrededor de esta esfera Boullée coloca hileras de árboles, siguiendo su perímetro. Es importante considerar para la comprensión de este proyecto la diferencia entre mausoleo y cenotafio. Ambos son monumentos funerarios pero en el segundo no se encuentran presentes los restos del fallecido al que se homenajea.

Este proyecto del que se conservaron los planos en la Biblioteca Nacional de París, no llegó a construirse, pero tuvo una enorme influencia en arquitectos no solo contemporáneos, sino posteriores como Karl Friedrich Schinkel o incluso el arquitecto del regimen nazi, Albert Speer.

La idea de Boullée coincide con la del epitafio que escribió Alexander Pope, en 1732: "La naturaleza y las leyes de la naturaleza se hallaban ocultas en la noche. Dios dijo, iqué nazca Newton! y todo fue luz" (Fig.3).

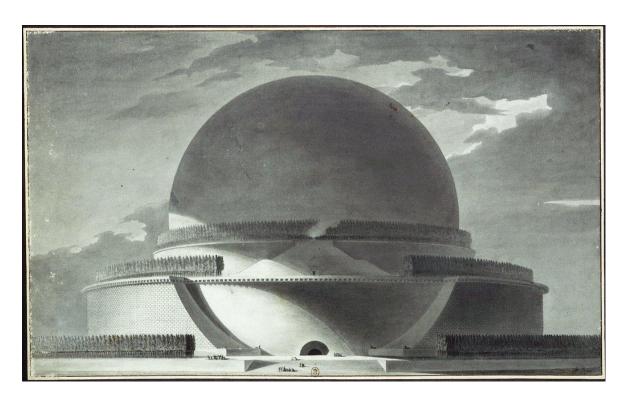


Fig. 2. Vista exterior del Cenotafio de Newton.

2. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

El dispositivo experimental será un modelo plano obtenido a través de tecnología CAD-CAM transportada a Maple con un despiece hipotético (Fig.4) del edificio en cuestión de Louis Etienne Boullée. Al ser un cuerpo de revolución el

análisis se puede realizar mediante un sistema de análisis de modelos planos. Durante la trayectoria del trabajo realizamos diferentes tipologías del modelo de Newton pero finalmente nos decidimos por un modelo muy concreto.

Originalmente consideramos una hipotética estructura de aparejo de sillares, como el que se observa en el grabado de alzado (Fig. 2) de 1'5m x 3m, un tamaño adecuado a las proporciones del proyecto, sin embargo, tras el estudio detallado de una de las secciones descubrimos que lo que habíamos considerado como las entradas de luz era realmente el despiece de las dovelas. El despiece considerado ubica los lechos radiales hacia la posición del cenotafio de Newton nos pareció una opción arriesgada estructuralmente ya que esto generaba unos esfuerzos de rozamiento muy altos, pero posteriormente vimos que esto precisamente jugaba a nuestro favor.

Para el cálculo despreciamos el podio sobre el que se sitúa la cúpula, ya que sus proporciones y geometría especialmente masiva no hacen sino contribuir a la estabilidad del conjunto. Con estas consideraciones realizamos un modelo de análisis vectorial e introdujimos los datos en Maple sobre el que aplicamos diversas hipótesis estructurales.

Tras dividir el archivo gráfico base (en formato .dxf) en 49 partes iguales y cortando los lechos radiales con la inclinación del centro base del cenotafio más no hacia el centro de la esfera; obtenemos las dovelas en la escala real; permitiéndonos obtener datos reales.

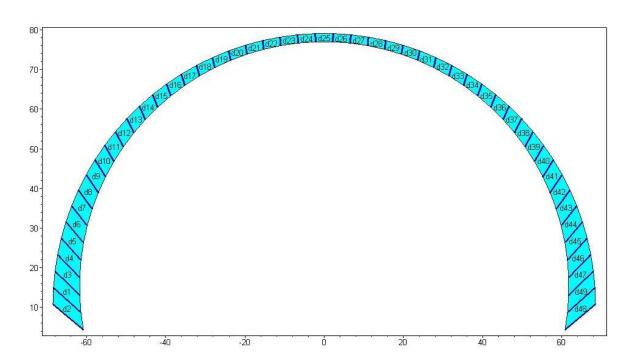


Fig. 4. División de las Dovelas en El Cenotafio de Newton.

Comenzamos aplicando el segundo teorema de Pappus-Guldin, que dice que el volumen de los sólidos de revolución es igual al producto del área de la superficie generatriz que los engendra Sg, por la longitud de la circunferencia Lc que describe el centroide o centro de gravedad de

dicha superficie. Gracias a este teorema encontramos el volumen total de los elementos de revolución, obteniendo el volumen por anillos del element (tabla 1) Julian Chaur González, Jorge Nieto Andrade, Manuel Esteban Barba Delgado

12025,43m ³
11571,5 m³
11054,92 m³
10485,72 m ³
9874,28 m ³
9231,09 m ³
8566,53 m ³
7890,7 m ³
7213,13 m ³
6542,69 m ³
5887,36 m ³
5254,13 m ³
4648,83 m ³
4076,1 m ³
3539,3 m ³
3040,48 m ³
2580,4 m ³
2158,5 m ³
1773,04 m³
1421,13 m³
1098,85 m³
801,41 m ³
523,25 m ³
258,28 m ³
32,12 m ³

Tabla 1. Volumen por anillos del elemento

Además el programa Maple permite introducir la densidad del material de los elementos que componen la cúpula, que aplicado al teorema anterior para sólidos de revolución podremos hallar el peso total de la cúpula. Nosotros consideramos piedra caliza, un material relativamente común con densidad 25 kN/m3 y una resistencia aceptable. De estos cálculos con Maple, no solo obtenemos las acciones verticales, también los empujes laterales generados.

Condicionamos al programa para que no considere tracciones ya que las estructuras de fábrica no trabajan con este tipo de esfuerzos.

Es decir, estamos considerando un modelo de "gajos" y fuerzas anulares (tabla 2) (representadas como radiales) que resiste esfuerzos a compresión según la dirección de los paralelos y de los meridianos (Fig.5 y 6).

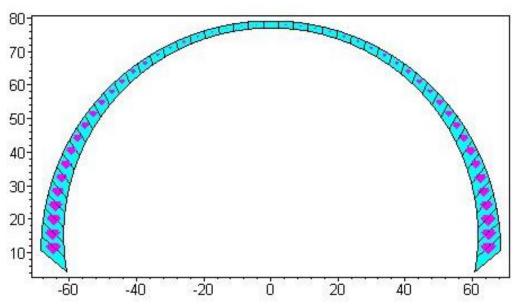


Fig. 5. Distribución de cargas verticales en el Cenotafio de Newton. (Pappus-Guldin)

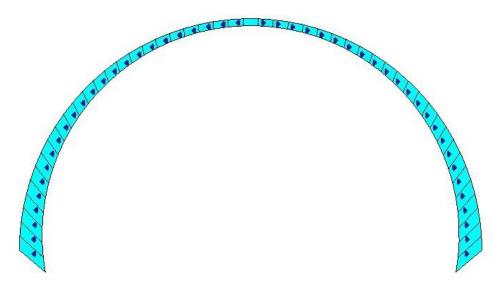


Fig. 6. Reacciones radiales en El Cenotafio de Newton.

VALOR CARGA
-2,9011527
-3,0149608
-2,7716386
-2,6289322
-2,4756339
-2,3143754
-2,1477618
-1,9783189
-1,8084430
-1,6403535
-1,4760529
-1,3172901
-1,1655319
-1,0219402
-0,8873568
-0,7622962
-0,6469449
-0,5411688
-0,4445282
-0,3562987
-0,2754991
-0,2009252
-0,1311878
-0,0647554
-0,1311878

Tabla 2. Valores de carga de las dovelas

Para ayudarnos con los procedimientos pertinentes y ayudar a comprender la estructura y los cortes de la bóveda realizamos un maqueta de estudio en papel, de una sección diferencial de la bóveda. Estas piezas fueron realizadas mediante las técnicas de abatimiento y plantillas estereotómicas y tecnología CAD-CAM que nos permitió obtener las diferentes caras y su medida en verdadera magnitud.

Este modelo fue muy util para comprender el comportamiento de las piezas y comprobar cómo la hípotesis del programa Maple era correcta (Fig 7 y 8).

3. RESULTADOS

Con el análisis elasto-plástico en las estructuras se suele hallar la excentricidad y los desplazamientos de las tensiones, pero en nuestro caso nos ponemos en el caso más desfavorable colocando esa excentricidad a ¾ de la base de cada una de las dovelas como punto de aplicación de la resultante de las fuerzas que le son inherentes para este estado de cargas. Partiendo de esta hipótesis y con una distribución de cargas triangular el objetivo se

convierte en el cálculo de la Tensión Máxima (max) para comprobar la resistencia material de la bóveda la comprobación de su estabilidad geométrica.



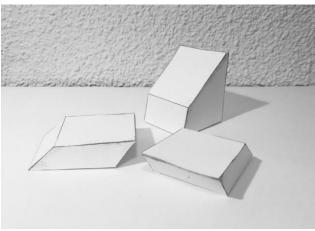


Fig. 7 y 8. Piezas del modelo en papel de la bóveda del Cenotafio de Newton.

A través del programa obtenemos los esfuerzos numéricos en cada uno de los anillos y el coeficiente de seguridad geométrico (CSG). El CSG es la variable que condiciona la línea de empujes al interior de la sección de la cúpula, resultado de dividir el espesor real del arco por el espesor límite mínimo para el sistema de

cargas considerado. La ventaja del uso de un programa de cálculo lineal nos ayuda en este proceso al poder cambiar un valor y obtener rápidamente un resultado que poder interpretar, ya que sencillamente con la modificación de esta variable podríamos comprobar si existe algún sistema de cargas geométricamente estable para el modelo.

El valor mínimo con el que nuestro sistema se comporta de manera estable antes del colapso fue 2, lo cual según indica Heyman en El Esqueleto de Piedra [ref.8] (pag 25): " [...] Si el coeficiente (de seguridad geométrico) fuera dos, la línea de empujes estaría contenida en un arco de la mitad del espesor"

Por definición obtenemos que la línea de empujes "es el lugar geométrico de los centros de empujes de paso de los esfuerzos en los planos de corte en una estructura es una forma de explicar el equilibrio de un conjunto de estructuras en contacto sometida a una sistema de carga" considerando las condiciones radiales, la inexistencia de tracciones, el CSG obtenemos que la línea de empujes (Fig.7) está contenida interiormente; ante esta resultante se puede decir que, al menos geométricamente, la cúpula es estable.

Como tenemos solución intentamos maximizar cualquier variable de la ecuación para obtener una solución límite y poder trabajar con datos extremos.

Determinados los valores generales de toda la Cúpula, es necesario puntualizar los resultados optando por un análisis estratificado cada cuatro dovelas esto conlleva a que los estratos 2 – 48, 4 – 46, 8 – 42, 12 – 38, 16 – 32, 20 – 28, 24 – 26, nos den las resultantes y las fuerzas que actúan sobre las mismas, mediante graficas (Fig.8) de esta forma obtenemos que paralelo se encuentra más solicitado.

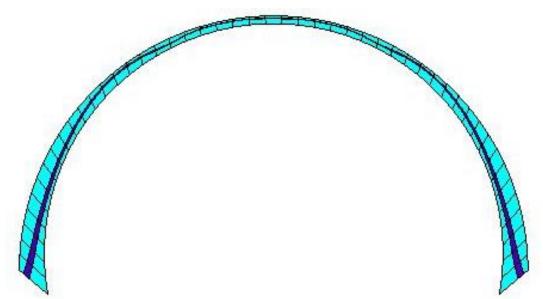


Fig. 7. Línea de Empujes con CSG = 2 en el Cenotafio de Newton.

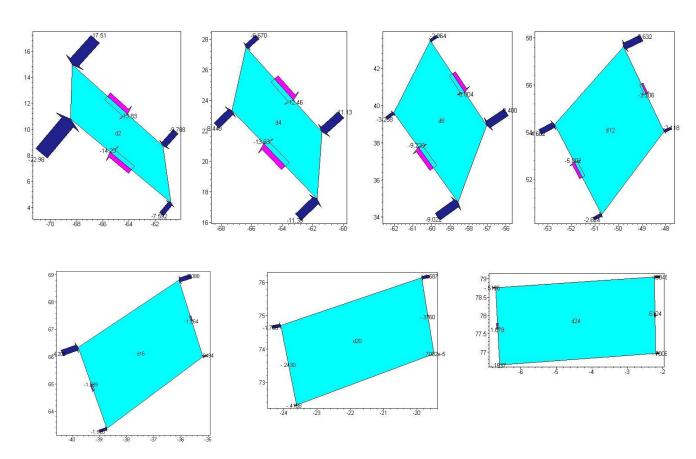


Fig. 8. Graficas individuales por Dovelas.

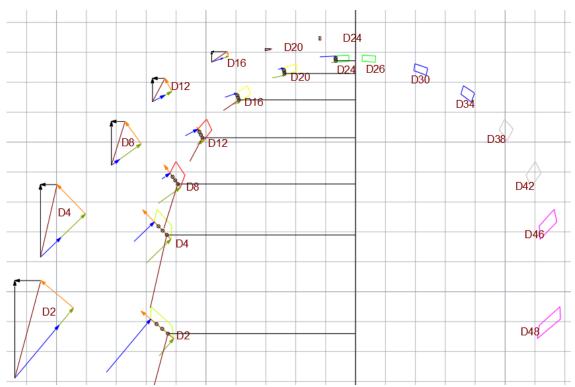


Fig. 9. Estática gráfica por elementos.

Las hojas de cálculo que se presentan a continuación (tablas 3 y 4) incluye los datos de densidad, volumen y peso para cada uno de los anillos analizados, además de sendas tablas que incluyen los cálculos precisos del análisis tensional de los anillos.

Observamos en esta cadena de tensiones que existe un descenso de las tensiones más o menos gradual y a partir de un anillo, que se encontrará a partir del número 8, las tensiones

van en aumento considerable hasta llegar al punto de la clave donde ya no apreciamos el mismo comportamiento.

Si bien el material para el cual desarrollamos el análisis aguantaría el cambio tensional, se evidencia un comportamiento que solo sale a la luz por este estudio particularizado por anillos.

	VOLÚMENES (m3)	Densidad (KN/m³)	PESO (KN)
Volumen Total	131549,170	25	3288729,250
Volumen desde anillo 4	96897,320	25	2422433,000
Volumen desde anillo 8	58739,700	25	1468492,500
Volumen desde anillo 12	31205,820	25	780145,500
Volumen desde anillo 16	13687,460	25	342186,500
Volumen desde anillo 20	4135,040	25	103376,000
Volumen desde anillo 24	290,400	25	7260,000

Tabla 3. Densidad, volume y peso de cada anillo analizado

Anillo	Area	N1	N2	Cortante
[2 - 48]	29,581	22,98	7,592	14,23
[4 - 46]	26,032	9,448	11,39	13,63
[8 - 42]	21,165	3,258	9,022	9,22
[12 - 38]	16,647	4,662	2,624	5,002
[16 - 38]	12,942	4,206	1,92	1,589
[20 - 30]	10,405	1,768	0,4168	0,243
[24- 26]	9,275	0,5196	0,1537	1,078

Anillo	Resultante	fy	fx	b	r	Distribuida (fy*2*π*r)	Alfa
[2 - 48]	33,722	32,578	8,708	10,026	62,715	12837,35981	256,1842387
[4 - 46]	24,9	24,274	5,545	8,034	63,112	9625,71855	251,6625629
[8 - 42]	15,356	14,659	4,575	5,913	59,445	5475,194412	268,2082844
[12 - 38]	8,838	7,808	4,14	4,313	51,205	2512,071773	310,5586029
[16 - 38]	6,155	3,475	5,08	3,168	38,991	851,3321821	401,9423994
[20 - 30]	2,198	0,664	2,096	2,439	23,736	99,0274238	1043,912848
[24- 26]	1,271	1,112	0,615	2,103	6,625	46,28822616	156,8433401

Anillo	Base dovela (b)	N1*alfa (A)	N2*alfa (B)	x=B*b/A+B	b - x
[2 - 48]	10,026	5887,113806	1944,95074	2,489774696	7,536225304
[4 - 46]	8,034	2377,707894	2866,436591	4,391364814	3,642635186
[8 - 42]	5,913	873,8225906	2419,775142	4,344225244	1,568774756
[12 - 38]	4,313	1447,824207	814,9057739	1,553295635	2,759704365
[16 - 38]	3,168	1690,569732	771,7294069	0,992908913	2,175091087
[20 - 30]	2,439	1845,637915	435,102875	0,465294398	1,973705602
[24- 26]	2,103	81,49579954	24,10682138	0,480069954	1,622930046

Anillo	Inercia I=b3/12	N=A+B	Tension 01 T=M/I*b-x+(N/AREA)	Tension 02 T=M/I*x+(N/AREA)	Tmax(N*8)/ (3*b*r*2*Pi)
[2 - 48]	83,9850248	7832,064546	264,7667268	264,7667268	5,2865
[4 - 46]	43,21298194	5244,144486	201,4499265	201,4499265	4,3895
[8 - 42]	17,22829862	3293,597733	155,6152957	155,6152957	3,9768
[12 - 38]	6,685857691	2262,729981	135,9241894	135,9241894	4,3484
[16 - 38]	2,649563136	2462,299139	190,2564626	190,2564626	8,4602
[20 - 30]	1,209077543	2280,74079	219,1966161	219,1966161	16,7204
[24- 26]	0,775062227	105,6026209	11,38572732	11,38572732	3,2169

Tabla 4. Análisis tensional de los anillos analizado

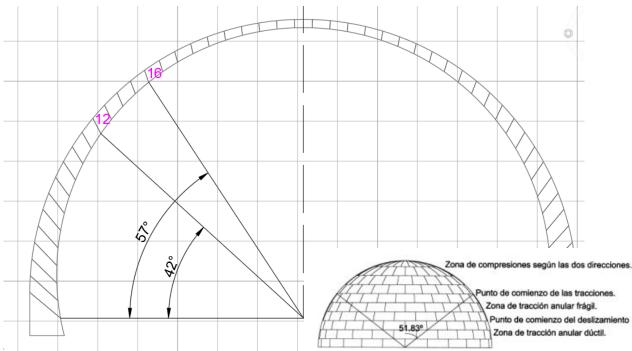


Fig. 10. Angulo de cambio de Tensiones.

3.1. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

El Cenotafio es geométricamente estable: se puede interpretar por los resultados obtenidos a través de la obtención de un espectro de líneas de empujes contenidas en su geometría. Esto nos lleva a dejar de lado la forma y pensar en la dimensión ya que hablamos de medidas exorbitantadas para un edificio de fábrica. La dimensión no es relevante en cuanto a la estabilidad geométrica del objeto, solamente su forma y la forma de contención de ese arco de empujes.

El proyecto se divide básicamente en dos partes, la primera que nos lleva al análisis de todo el conjunto y la segunda que nos lleva al análisis individual de los anillos que generan un todo; los resultados nos muestran que podemos ensayar con varios materiales cambiando su densidad y variando considerablemente el comportamiento del edificio, de tal manera y como se ha explicado en el punto 3. Esto podría

causar un cambio en los valores de las fuerzas y las líneas de empuje. Al considerar la caliza como elemento uniforme para todos los anillos de la cúpula y ser estos resistentes hemos prescindido de continuar con las pruebas en cuanto al material se refiere.

4. CONCLUSIONES

La conclusión más importante es que la cúpula podría construirse. Es un objeto estable geométricamente ٧ con un material medianamente común como es la caliza. Siguiendo estrictamente los preceptos de Heyman podríamos llegar a estrechar mucho más la cúpula, al menos hasta el 4,2% del radio, lo que daría lugar a una cúpula de 1,35m de espesor, aunque dada la posición de los lechos habría que comprobar la viabilidad de esta afirmación.

Materialmente se ha considerado uniforme, pero vistos los resultados podrían aplicarse diferentes

Uso de modelos de cálculo didácticos en la estructura axilsimétrica del cenotafio de Newton Julian Chaur González, Jorge Nieto Andrade, Manuel Esteban Barba Delgado

materiales a los anillos que aseguraran su estabilidad o que contribuyeran a la esbeltez anteriormente mencionada, utilizando a nuestro favor el peso de la fábrica.

De la comprobación geométrica se podría deducir también que Boullée, pese a ser un autor utópico, tenía en cuenta la viabilidad constructiva de sus proyectos siguiendo las reglas de proporción no solo en el aspecto formal, sino en el constructivo. Pese a todo, esto último podría contrastarse comprobando otros proyectos del autor.

Por otro lado el cambio tensional de la cúpula nos muestra un comportamiento a primera vista extraño, sin embargo, recordando que el método de análisis es un método por gajos en el que va variando el espesor en altura y considerando, además, que nuestra cúpula no es hemiesférica estricta, observamos que a cierta altura cambia el descenso de las tensiones a convertirse en un aumento considerable. Si observamos el gráfico (Fig. 10) vamos que empiezan a subir a partir del anillo 8 y convirtiéndose en máximas en el 16 punto donde la cúpula cambia de un comportamiento comportamiento por gajos un como membrana cual en la serían posibles compresiones anulares para un espesor menor.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a "Estefi" por sus enseñanzas y por despejar las dudas que se presentaron al final del Proyecto.

REFERENCIAS

[1] Boullée& visionary architecture ed. Helen Rosenau, Pub. Harmony Books, Nueva York, 1976

- [2] HEYMAN J. "Teoría, Historia y Restauración de Estructuras de Fábrica: Colección de Ensayos". Madrid, Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente, Centro de Publicaciones, 1995.
- [3] Huerta, Santiago (1996) La teoría del arco de fábrica: desarrollo histórico. Revista O.P. Ingeniería e historia, Ed: Colegio de ingenieros de caminos, canales y puertos, Barcelona.
- [4] Boullée, Etienne-Louis (1728 1799)", the Hutchinson Encyclopedia, Helicon (2001).
- [5] Boullée, Etienne-Louis (1728 1799)", Crystal Reference Encyclopedia (2001).
- [6] HUERTA S. "Arcos, bóvedas y cúpulas: geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica". Madrid, Instituto Juan de Herrera, 2004.
- [7] UNGEWITTER, G. "Lehrbuch der Gotischen Konstruktionen". Leipzig, 1901
- [1] HEYMAN J. "El Esqueleto de Piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica". Madrid, Instituto Juan de Herrera, 1999.